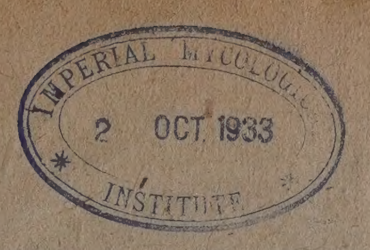
1933 № 4



ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК

СОЮЗА СОВЕТСКИХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ РЕСПУБЛИК

VII СЕРИЯ

ОТДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'UNION DES RÉPUBLIQUES SOVIÉTIQUES SOCIALISTES

VII SÉRIE

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES

ЛЕНИНГРАД — LENINGRAD
ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

ПРИМЕР СТАНДАРТНОЙ ЦИТАТЫ • EXEMPLE DE CITATION

Л. В. Писаржевский. К теории гетерогенного катализа.
ИМЕН, 1933, № 4, стр. 571.

L. Pisarževskij. Contributions à la théorie de la catalyse hétérogène.
BAS-MN, 1933, № 4, p. 571 (en russe).

Напечатано по распоряжению Академии Наук СССР

Апрель 1933 г.

Непременный секретарь академик *В. Волгин*

Редактор издания академик-секретарь ОМЕН А. А. Борисяк

Технический редактор Л. А. Федоров
Ученый корректор С. С. Чернявский

Начато набором в январе 1933 г. — Подписано к печати 20 апреля 1933 г.

160 (471—630) стр. (66 фиг.)
Формат бум. 72 × 110 см. — $10^2/_8$ печ. л. — 42 000 тип. зн. в печ. л. — Тираж 2700
Ленгорлит № 7212. — АНИ № 131. — Заказ № 508
Типография Академии Наук СССР. В. О., 9 линия, 12

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1933
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

МАКС ВОЛЬФ (MAX F. WOLF)

НЕКРОЛОГ

Составлен А. А. Белопольским

3 октября 1932 г. скончался член-корреспондент Академии Наук СССР, директор астрономической обсерватории «Königstuhl» в Гейдельберге, профессор Макс Вольф, на 69 году жизни.

Он начал рано интересоваться астрономией, 16-ти лет уже наблюдает небо на обсерватории, сооруженной собственными средствами при содействии своего отца, преподавателя физики. В 1884 г. он открыл комету, названную его именем, оказавшуюся периодической. Изучение орбиты ее представляло большой интерес, и наша Академия Наук в течение нескольких лет выдавала астроному Пулковской обсерватории Каменскому (ныне директору обсерватории в Варшаве) субсидию для вычисления возмущений элементов орбиты этой кометы.

По окончании университетского образования и усовершенствования по теории за границей Вольф получает должность приват-доцента Гейдельбергского университета и в то же время продолжает свои астрономические наблюдения.

Главное внимание его было обращено в то время на обнаружение новых объектов на небе. Старый способ при помощи визуальных наблюдений через так наз. кометоискатели был способ неблагодарный и требовал от наблюдателя большого терпения и выдержки. Вольф заменил его фотографическим способом, причем воспользовался светосильными короткофокусными объективами. Благодаря этому методу Вольф в весьма короткое время открыл множество малых планет (около 500). До 1897 г. все наблюдения производились на собственной обсерватории; в этом году Вольф перешел, в качестве директора, вместе со своими инструментами, в правительственную астрофизическую обсерваторию в Königstuhl'е. Тут ему пришла на помощь американская меценатка мисс Брюс (Miss K. W. Bruce). На

пожертвованные ею средства был приобретен инструмент с двумя одинаковыми камерами по 16 дм. отверстия при отношении $\frac{O}{F} = \frac{1}{5}$ (O — отверстие объектива, F — фокусн. расстояние) с полем $8^\circ \times 6^\circ\!.5$.

Программа работ благодаря этому инструменту была значительно расширена, методы разработки получаемого материала усовершенствованы. А именно, Вольф один из первых обратился к стереоскопическому методу изучения полученных фотографий разных избранных им участков неба. Построенный фирмой Цейсс по его заказу стереоскопический аппарат (стереокомпаратор) позволил с наименьшей затратой времени и труда замечать малейшие перемены в светилах за промежуток времени, отделяющий моменты экспозиции пластинок. Этим прибором легко находились на пластинках малые планеты, новые переменные звезды, новые звезды и слабые туманности. Последние были предметом особо тщательного исследования, и на этом поле Вольф сделал весьма важные открытия, касающиеся строения и эволюции Вселенной.

Им обследованы были туманности в Орионе, в Лебеде, в Возничем, в которых им обнаружены новые туманные массы (в Лебеде — туманность «Америка»; в Орионе — три слабых туманных сгустка и др.).

Особенно привлекало Вольфа исследование «Млечного пути». Он делал многочисленные снимки разных частей его при продолжительных экспозициях и обнаружил замечательное соотношение расположения слабых обширных туманностей к окружающим их звездам. Почти без исключения туманности граничат, с одной стороны, с пространством, в котором звезд совсем нет. Иногда эти пустые пространства имеют вид каналов, в конце которых находится туманность. Картина производит впечатление канала, прочищенного туманностью во время своего движения. Всего обследовано 20 туманностей, обнаруживающих упомянутую выше картину, которая несомненно сыграет большую роль в изучении эволюции Вселенной. Еще более замечательные результаты получены Вольфом при изучении малых туманностей, которые разделяются на три главных группы: I правильные, II неправильные и III бесформенные.

Особенно поразительно большое количество туманностей, составляющих I группу; для примера укажем, что в созвездии Девы на небольшой площади в один квадратный градус получилось на фотографии 130 слабых туманностей. На всем небе нужно считать их миллионами. Огромная работа была произведена по измерению положения этих туманностей на небе. Для этого построен был специальный прибор, позволяющий в сравнительно

короткое время измерить и вычислить положение этого необъятного числа объектов. Оказалось, что наибольшее число туманностей этого класса сконцентрировано около полюса нашей Галактики (Млечного пути); по Вольфу они сконцентрированы на расстоянии $1^1/_2{}^\circ$ от принятого по иным соображениям полюса; в наиболее густой области насчитывается более чем 70 туманностей на пространстве квадратных четырех минут. На заснятых более пятнадцати областях неба получено более 5000 туманностей, в числе которых, в среднем, новых, неизвестных дотоле, в 12 раз больше, чем старых. А в некоторых областях это отношение неизмеримо больше.

Систематические снимки, производимые в течение длинного интервала времени, дают возможность легко находить звезды с большим собственным движением: при помощи стереокомпаратора сразу обнаруживают переместившиеся звезды. Тот же стереокомпаратор дает возможность отличать изображения спектра слабых газовых туманностей от изображения спектра звезды, ибо распределение яркости в спектре этих светил весьма различное.

Не менее примечательны исследования Вольфа в области спектрального анализа светил.

Для него Вольф располагал спектрографом с оптикой из стекла «UV», прозрачного к ультрафиолетовым лучам, и вогнутым зеркалом диаметром в 72 см. Главное внимание было обращено на самые интересные и в то же время очень слабые объекты, на слабые туманности и на звезды Вольф-Райе (однофамилец).

Туманности разделяются по спектру на газообразные с линейчатым спектором и на состоящие из совокупности мелких звезд со сплошным спектром; различить звездочки в те времена в туманностях не удавалось (теперь, при наличии 100-дюймового рефлектора Mt. Wilson'овской обсерватории, в некоторых туманностях удалось различить отдельные звезды). Только спектр мог решить вопрос о классификации туманностей. Вольф обратил прежде всего внимание на туманности в Лире (газообразная), в Андромеде и на туманность Мессье № 64. Чтобы получить удовлетворительный, достаточно выдержанный спектр этих объектов, приходилось делать очень большие выдержки, до 70 часов, которые распределялись в течение месяцев. Оказалось, что блестящих линий в спектре туманности Андромеды и Мессье № 64 не имеется вопреки показаниям прежних исследователей. Спектр получился сплошной, испещренный многими фраунгоферовыми линиями (45), идентичными с линиями в спектре Луны (Солнца); по характеру линий спектр походит на спектры Альдебарана или Арктура

(тип K_0). Отсюда следует, что туманность, по внешнему виду, на самом деле есть куча звезд, не разделяющихся благодаря колоссальному расстоянию их от Солнца: звезды сливаются подобно тому, как сливаются для невооруженного глаза звезды во Млечном пути в сплошное свечение. Повидимому, звезды, входящие в состав этих туманностей, приблизительно одного типа, а именно типа G — K. (В настоящее время многие из различимых в туманности Андромеды звезд оказались переменными типа Цефеид. Продолжительность периода Цефеид связана с расстоянием их от Солнца. По ним расстояние туманности Андромеды оценивается равным 900 тысяч световых годов.)

Звезды Вольф-Райе очень слабые. Спектр их заключает как эмиссионные линии, так и линии поглощения одновременно; они весьма интересны в том отношении, что являются в эволюции звезд переходной ступенью от планетарных туманностей, через новые звезды, к звездам вообще. Вольф исследовал около десятка этих слабых звезд, представляющих помимо общего сходства их спектров еще каждая индивидуальные особенности. Он обнаружил в спектре их линии, до него еще неизвестные. А именно, в спектре, помимо наличия двух водородных серий и линии λ 4634 обнаружена линия в ультрафиолетовой части спектра λ 348, с одной стороны, видимая в спектре газовых туманностей, а с другой, предсказанная теорией проф. Никольсона. Кроме того, в той же части спектра обнаружена новая резкая линия поглощения λ 386.

Научная деятельность Макса Вольфа была еще при жизни оценена учеными учреждениями разных стран. Так, наша Академия избрала его своим членом-корреспондентом в 1924 г., Астрономическое общество в Лондоне присудило ему в 1914 г. золотую медаль и дало в своих «Monthly Notices» блестящую оценку его научной деятельности, и т. д.

Последние годы Вольф страдал сердечной болезнью, от которой, вероятно, и скончался.

Имя его еще долго будет упоминаться в науке, а его исследования продолжаться на созданной им обсерватории школой его учеников.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1933
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

ОСНОВНЫЕ ПРОБЛЕМЫ НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКИ[1]

Н. М. КРЫЛОВА и Н. Н. БОГОЛЮБОВА

При изучении разнообразных колебаний, встреченных до сих пор в различных областях физических наук и техники, старались обычно приводить проблему к изучению так называемых линейных колебаний, для которых соответствующие дифференциальные уравнения будут линейными уравнениями с постоянными (по времени) параметрами.

Обстоятельство это зависело в значительной мере от того, что теория этих уравнений благодаря своей простоте является достаточно разработанной при современном состоянии науки, даже с точки зрения практических приложений, как об этом определенным образом свидетельствуют, напр. известные символические методы Гивизайда, имеющие столь обширное применение в электротехнике.

Детальное изучение колебаний различных типов, встречаемых исследователем, в особенности в той части техники, которой присвоено в последнее время наименование «Техника колебаний», заставляет, однако, притти к заключению о том особо важном значении, которое в дальнейшем развитии науки суждено иметь так называемым нелинейным колебаниям.

Отсутствие соответствующего математического аппарата часто заставляло исследователей ограничиваться рассмотрением линейных колебаний даже в тех вопросах, где по существу дела имели место нелинейные колебания, т. е. такие колебания, которым соответствуют либо нелинейные дифференциальные уравнения, либо линейные, но с параметрами, зависящими от времени.

Этот последний класс колебаний тоже может быть отнесен к нелинейным колебаниям (ибо здесь появляются также некоторые существенно нелинейные свойства, о которых речь будет впереди), и таким образом применяемая физическая терминология отличается от той, которая принята в чистой математике.

[1] Ответ на запрос Академии Наук СССР в связи с работами ее Ноябрьской сессии 1932 г.

Оставляя здесь в стороне, за отсутствием времени, более или менее подробный очерк исторического развития теории нелинейных колебаний, ограничимся сперва только указанием на то, что как раз труднейшие проблемы небесной механики (в частности знаменитая задача о трех телах) дали первые примеры для изучения нелинейных колебаний.

Таким образом, уже начиная с Лагранжа, астрономы, при исследовании различных проблем, относящихся к нелинейным колебаниям, пользовались с успехом особым методом, состоящим в разложении искомых функций, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям по степеням некоторого малого параметра μ, входящего в данное дифференциальное уравнение.

Надлежит, однако, заметить, что таким образом получаемые разложения, вообще говоря, не пригодны для изучения качественных свойств вышеупомянутых интегралов, в особенности для относительно больших интервалов времени, благодаря присутствию особых членов, называемых секулярными

$$t^m \sin \alpha t,$$

где время t стоит вне знака синуса и косинуса.

В своих знаменитых исследованиях Г. Пуанкаре и А. Ляпунов обращали особое внимание на необходимость образования таких разложений, которые были бы свободны от секулярных членов, а потому и более пригодны для изучения устойчивости движения.

«Это есть именно тот пункт», как говорит знаменитый автор «Новых методов небесной механики», «который издавна был известен астрономам, и сами основатели небесной механики в тех случаях, когда они желали получить формулы, пригодные для длинного интервала времени, должны были оперировать другим образом и отказаться от разложения по степеням масс» (вышеупомянутый параметр).

Эта проблема особой важности — получение разложений свободных от секулярных членов — была разрешена во второй половине прошлого века Гильденом и Линдштеттом, но разложения, полученные этими учеными, несмотря на их большую практическую важность, должны быть использованы для изучения качественного характера интегралов с особой осторожностью, так как Пуанкаре в своем знаменитом мемуаре («О задаче трех тел и об уравнениях динамики», Acta Mathematica, t. 13) доказал расходимость этих разложений в некоторых случаях.

Установление первых строгих методов для исследования периодических решений нелинейных проблем принадлежит Пуанкаре и Ляпунову, которые должны быть поэтому рассматриваемы как основоположники этой

новой главы механики, — нелинейная механика, целью которой является создание общей теории нелинейных колебаний.

Очевидно, что колебания, соответствующие периодическим решениям дифференциальных уравнений, являются весьма частным случаем колебаний, встречаемых в природе, и что результаты, сюда относящиеся, как говорит Пуанкаре, «дают весьма мало для изучения общей проблемы, но что дает им все-таки некоторую цену, это то, что они установлены с математическою строгостью» в той области науки, где «не обращали должного внимания на ту абсолютную строгость, которая требовалась в других частях математики».

До самого последнего времени, однако, основные результаты Пуанкаре и Ляпунова не были достаточно утилизированы физиками и инженерами, которые продолжали, даже при изучении существенно нелинейных проблем, пользоваться классическим аппаратом линейной теории, как лекарством от всех болезней.

Голландский ученый Бальтазар ван дер Поль, как кажется, впервые обратил внимание исследователей на необходимость создания специальных методов для трактования нелинейных проблем в радио-технике. В одной из своих работ он говорит по этому поводу так: «является поэтому удивительным, что до сих пор, хотя некоторые теоретические исследования проблемы уже появились, явление, насколько нам известно, было трактовано только помощью линейной теории».

В своих работах в области нелинейных колебаний радио-техники Ван дер Поль, не пользуясь вышеупомянутыми результатами Пуанкаре-Ляпунова, получает свои результаты помощью искусственных приемов, лишенных, однако, необходимой математической строгости.

Надлежит, однако, отметить, что не строгие приемы знаменитого голландского ученого, применяемые им ad hoc, дают, тем не менее, некоторые указания относительно свойств квази-периодических колебаний, для изучения которых методы Пуанкаре-Ляпунова, по крайней мере в их современном состоянии, являются неприменимыми.

В своих многочисленных работах ван дер Поль разработал теорию затягивания, также как теорию синхронизации (собственной частоты к частоте внешней силы), и эти исследования привели его к изучению явления демультипликации частоты в реляксационных системах (по терминологии ван дер Поля). Заметим мимоходом, что явления демультипликации, особой важности в радио-технике, состоят в том, что под действием внешней периодической силы с частотою α в рассматриваемой си-

стеме возбуждаются колебания, частоты которых будут дробными частями α.

Это явление имеет место не только для систем реляксационных, но также для систем Томсоновского типа, т. е. не только для систем, где омические сопротивления играют особую роль, определяя даже собственные частоты системы (случаи реляксации), но также для систем, где омические сопротивления являются относительно малыми и почти не оказывают влияния на величину собственных частот (случаи систем Томсоновского типа).

Японский ученый M. Koga изучил (Proc. of the Instit. Radio Eng., 1927) явления демультипликации частоты для систем Томсоновского типа (автоколебательных).

Все эти исследования, при всей своей важности, были однако разработаны помощью недостаточно строгих с математической точки зрения методов и надлежит заметить, что первые строгие методы в радио-технике были введены во Франции M. Liénard и M. Cartan, а в СССР представителями школы акад. Мандельштама и проф. Папалекси. Немецкие ученые школы Barkhausen-Möller занимались с успехом приближенною теориею, которую можно было бы назвать квази-линейной теорией, применяемой в инженерных расчетах, но которая в большинстве случаев не может, однако, заменить более строгой теории, а именно теории нелинейных колебаний.

M. Liénard и M. Cartan изучали автоколебательные системы реляксационного типа так же как и системы Томсоновского типа, причем Liénard пользовался некоторыми специальными геометрическими методами (основанными на одном предварительном преобразовании, которое не обобщается для случаев колебаний, возбужденных внешними силами) и получил важные результаты относительно установления режима, более точного подчисления периодов, амплитуд колебаний и т. д.

В согласии с вышесказанным надлежит отметить, что школа акад. Мандельштама и проф. Папалекси впервые обратила внимание радио-техников на строгие методы Пуанкаре-Ляпунова при изучении проблемы периодических колебаний.

Эти знаменитые методы были формулированы в гениальных работах основоположников нелинейной механики для систем весьма общего вида. Системы, встречаемые в радио-технике, являются только весьма частными случаями вышеупомянутых систем, и в связи с этим любопытно констатировать, что, например, явление демультипликации в его общем виде изу-

чено в главе 28 III тома знаменитых «Новых методов небесной механики» Пуанкаре.

В этом направлении проф. Андронов и проф. Витт разработали теорию синхронизации (Mitnehmen немецких авторов) и акад. Мандельштам с проф. Папалекси изучили явление демультипликации частот для триодного не самовозбужденного (nicht angefacht) осцилятора[1] для случаев систем Томсоновского типа.

Несмотря на всю их важность, знаменитые методы Пуанкаре-Ляпунова являются применимыми, по крайней мере в их настоящей форме, только для изучения периодических колебаний, тогда как в радио-технике, так же как, разумеется, и в других науках, по существу приходится иметь дело с так называемыми квази-периодическими колебаниями, т. е. колебаниями, обладающими, по крайней мере, двумя независимыми друг от друга частотами.

Эти квази-периодические колебания связаны с вопросом о существовании квази-периодических решений нелинейных дифференциальных уравнений, причем исследование последних представляет собою исключительной трудности проблему, которой были посвящены глубокие исследования Боля (О некоторых общих дифференциальных уравнениях, приложимых в механике, Дерпт, 1900).

Но в исследованиях основателя теории квази-периодических функций были изучены, однако, только квази-периодические решения тех типов нелинейных дифференциальных уравнений, которые не встречаются в радиотехнике и вообще в системах, могущих генерировать собственные колебания.

Проблема оставалась таким образом открытой, несмотря на всю ее важность (см. напр. темы для исследований, формулированные в заключениях «Всесоюзной конференции по колебаниям», Москва 1931 г.).

В трех последовательных сообщениях[2] Парижской Академии Наук «Quelques exemples d'oscillations non linéaires», t. 194, p. 957; «Sur le phénomène de l'entrainement en radiotéchnique», t. 194, p. 1064; «Sur le phénomène de démultiplication de fréquence en radiotéchnique», t. 1904, p. 1119) авторы настоящей статьи Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов поставили себе целью содействовать решению проблемы, выдвинутой Всесоюз-

[1] В русской литературе по радио-технике вместо принятого во франц. и англ. работах термина «осцилятор» обычно пользуются термином «электронный генератор».

[2] Рецензия этих работ, написанная проф. Levi-Civita, появится в октябр. номере Boll. Unione Mat. Italiana.

ной конференцией по колебаниям, и установили новые методы, пригодные для исследования как периодических, так и квази-периодических колебаний.

Помощью разработанных ими методов Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов изучили квази-периодические режимы, возбуждаемые в автоколебательном осциляторе под действием внешней периодической силы. В вышеупомянутых сообщениях были представлены также результаты, относящиеся к исследованию сложных явлений резонансов в нелинейном случае, причем кроме главного резонанса (единственно возможного в линейной теории) были исследованы также и так называемые демультипликационные резонансы, характеризующиеся, так же как и главный резонанс, исчезновением биений внутри некоторых зон, ширина и расположение которых были тоже определены.

Результаты эти полагают основание нелинейной механики, тем более, что они немедленно прилагаются во всех тех областях науки, где исследуются нелинейные колебания, в особенности, например, в астрономии.

В своих дальнейших исследованиях Н. М. Крылову и Н. Н. Боголюбову удалось освободиться от необходимости образования дифференциальных уравнений, соответствующих задаче (и трактование которых часто столь затруднительно), причем вместо них появляются непосредственно образовываемые символические уравнения, трактование которых, сохраняя элегантность и гибкость методов символического исчисления Гивизайда (линейная задача), представляет собою надлежащее обобщение символических методов для нелинейных проблем.

Поле приложений этих новых методов чрезвычайно обширно, тем более, что при изучении нелинейной проблемы авторы настоящей статьи констатировали (см. далее) наличность некоторых явлений разрыва непрерывности, которые бросают новый свет на многие области науки, и в особенности на квантовую механику.

В настоящей статье, за отсутствием времени и места, авторы ограничиваются представлением лишь краткого резюме небольшой части их результатов, полученных в области нелинейной механики.

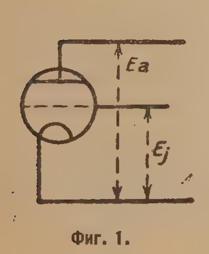
Рассмотрим в качестве примера какой-либо осцилятор (хотя, разумеется, можно было бы теми же методами трактовать и более сложные системы), единственным нелинейным элементом которого является триодная лампа. Такой осцилятор по сути составляет систему, слагающуюся из линейного внешнего контура и электронной лампы.

Электроды этой лампы, как известно, представляют один по отношению к другим емкости, так что через ламповые электроды проходят не

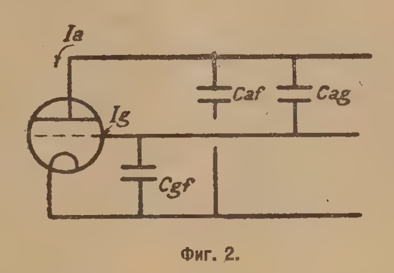
только чисто электронные токи, но также и емкостные токи благодаря присутствию емкостей Caf (анод-нить), Cgf (нить-сетка), Cag (анод-сетка).

Рассматриваемая лампа (фиг. 1) может быть следовательно схематически представлена фиг. 2, т. е. фиктивной лампой и линейными контурами, слагающимися из емкостей, причем через фиктивную лампу проходят только электронные токи, определяемые помощью так называемых статических характеристик (снимаемых экспериментально на чертеж), а именно

$$(1) \quad I_a = f_a(E_a, E_g), \; I_g = f_g(E_a, E_g), \; I_e = I_a + I_g = f(E_g + DE_a),$$



Фиг. 1.



Фиг. 2.

где I_a — анодный ток, I_g — сеточный ток, I_e — полный эмиссионный ток, E_a и E_g означают соответственно анодное и сеточное напряжения, управляющее напряжение («Steuerspannung» Баркгаузена), D — проницаемость.

Рассматриваемый осцилятор является таким путем разложенным на «статическую» лампу [для которой соотношения между натяжениями и токами даются формулами (1)] и на полный линейный контур, состоящий в свою очередь из линейного внешнего контура и линейного контура, образованного вышеупомянутыми внутренними емкостями.

В силу законов Кирхгофа всегда возможно однако характеризовать этот общий линейный контур тремя символическими импедансами

$$R_a(j\omega), \; R_g(j\omega), \; M(j\omega),$$

где

$$j\omega = \frac{d}{dt}$$

и тогда получаем

$$(2) \qquad e_a = -R_a i_a + M i_g, \quad e_g = -R_g i_g + M i_a,$$

где

$$E_a = E_a^0 + C_a, \; E_g = E_g^0 + C_g, \; I_g = I_a^0 + i_g, \; I_g = I_g^0 + i_g,$$

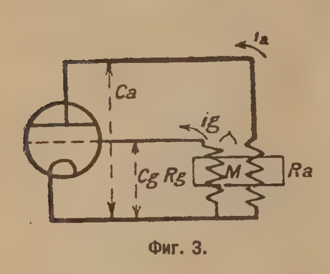
тогда как

$$E_a^0,\ E_g^0,\ I_a^0,\ I_g^0$$

означают соответственно постоянные части

$$E_a,\ E_g,\ I_b,\ I_g,$$

т. е. их средние значения в смысле, связанном с этим термином в теории рядов Фурье.



Фиг. 3.

Система символических уравнений (2) соответствует представлению (специальный метод включения источников постоянного напряжения здесь не принят во внимание) общего линейного контура помощью схемы, представленной на фиг. 3.

На основании системы (1) получаются сразу общие символические уравнения осцилятора

$$(3)\begin{cases} e_a = -R_a \text{ п. ч. } f_a(E_a^0 + e_a,\ E_g^0 + e_g) + M \text{ п. ч. } f_g(E_a^0 + e_a,\ E_g^0 + e_g) \\ e_g = -R_g \text{ п. ч. } f_g(E_a^0 + e_a,\ E_g^0 + e_g) + M \text{ п. ч. } f_g(E_a^0 + e_a,\ E_g^0 + e_g). \end{cases}$$

В особо важном частном случае, а именно при отсутствии сеточного тока (что стараются обычно реализовать на практике), уравнение (3) упрощается и приводит к следующему символическому уравнению

$$(4) \qquad e = R_k \text{ п. ч. } f(E_0 + e),$$

где

$$e = e_g + De_a,\quad E_0 = E_g^0 + DE_a^0,\quad R_k = R_a(K - D),\quad K = \frac{M}{R_a}\cdot$$

Тем же приемом можно было бы разумеется получить также символическое уравнение, не содержащее знака оператора п. ч.,[1] и таким образом приходим к уравнению

$$(5) \qquad \epsilon = R_k f(\mathcal{E}_0 + \epsilon)$$

где

$$\epsilon = E_g + DE_a - \mathcal{E}_0,\ \ \mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_g + D\mathcal{E}_a$$

[1] п. ч. (переменная часть).

$\mathcal{E}_a$ и $\mathcal{E}_g$ будут соответственно вольтажи батарей, входящих в анодный и сеточный контуры.

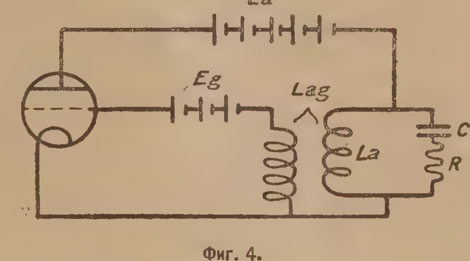
Заметим здесь, что уравнение (5) в других обозначениях было также приведено Л. Корбелье в его сообщении в Парижскую Академию (том 194, стр. 1564). Это уравнение (5) по существу является, очевидно, не чем иным, как дифференциальным нелинейным уравнением.

Чтобы в этом убедиться, достаточно представить R_k в форме рациональной функции (что разумеется всегда возможно для случаев, обычно встречаемых на практике)

$$R_k(j\omega) = \frac{P(j\omega)}{Q(j\omega)},$$

где P, Q будут полиномами в $j\omega$, и тогда из (5) имеем

$$Q\left(\frac{d}{dt}\right)\epsilon = P\left(\frac{d}{dt}\right)f(\mathcal{E}_0 + \epsilon).$$



Фиг. 4.

Взяв в качестве примера тот осцилятор, схема которого представлена на фиг. 4 и для которого внутриламповыми емкостями по предположению можно пренебречь, получаем очевидно

$$K = \frac{L_{ag}}{L_a}, \quad R_a = \frac{L_a j\omega\left(R + \frac{1}{Cj\omega}\right)}{L_a j\omega + R + \frac{1}{Cj\omega}},$$

так что

$$R_k = (L_{ag} - L_a D)\frac{j\omega(1 + RCj\omega)}{L_a C(j\omega)^2 + RC(j\omega) + 1},$$

откуда и вытекает нелинейное уравнение, соответствующее рассматриваемому символическому уравнению

$$L_a C\frac{d^2\epsilon}{dt^2} + RC\frac{d\epsilon}{dt} + \epsilon - (L_{ag} - L_a D)\left(RC\frac{d^2}{dt^2} + \frac{d}{dt}\right)f(\mathcal{E}_0 + \epsilon).$$

Возвращаясь теперь в символическому уравнению (4), предположим, что дело идет о системе Томсоновского типа, т. е. что омические сопротивления, входящие в осцилятор, достаточно малы.

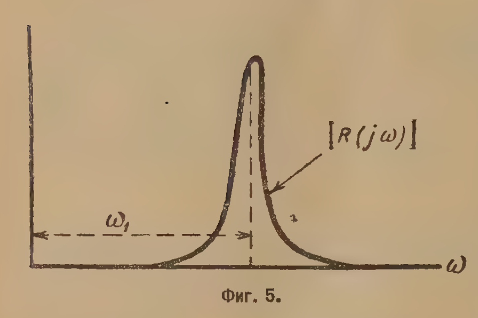
Предположим также для простоты изложения, что общий линейный контур, о котором выше говорилось, допускает только одну резонансную

частоту; другими словами предположим, что существует только один единственный положительный корень уравнения

$$z(\omega)=0 \text{ (где вообще } R_k(j\omega)=r(\omega)+jz(\omega)\text{)},$$

по соседству с которым модуль функции $|R_k(j\omega)|$ принимает форму, указанную на фиг. 5. (случай острого резонанса). Тогда, обозначая через ω_1 этот корень и полагая

$$(6)\qquad f_n(B)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(E_0+B\cos t)\cos nt\,dt,\quad n=1,\,2,\,\ldots$$



Фиг. 5.

можно установить следующие результаты: если уравнение

$$(7)\qquad r(\omega_1)f_1(B)=B$$

допускает в B такой корень, что

$$(8)\qquad r(\omega_1)f_1'(B)<1,$$

то существует устойчивый колебательный режим, и в первом приближении имеем

$$(9)\qquad e=B\cos\omega_f t,\quad \omega_f=\omega_1.$$

С другой стороны, если бы омические сопротивления точно равнялись нулю, тогда, в случае отсутствия лампы, вместо уравнения (4) имело бы место символическое уравнение

$$z(\omega)e=0,$$

решение которого, очевидно, будет

$$e=A\cos\omega_1 t,$$

т. е. той же формы, как и решение (9), но здесь амплитуда является произвольной и зависит от начальных условий.

Из сказанного вытекает, что система Томсоновского типа может быть с известным приближением уподоблена линейной не затухающей системе, но среди всех решений, доставляемых линейной теорией, надле-

жит выбирать для системы Томсоновского типа частные решения, а именно те, которые удовлетворяют некоторым определенным условиям «квантирования» (уравнение (7) для амплитуды колебаний). Таким образом, роль «малой нелинейности» систем Томсоновского типа сводится, главным образом, к наложению некоторых определенных условий селекции (выбора), так же, как при начале квантовой механики (исследования Бора-Зоммерфельда) ограничивались выбором среди решений, доставляемых классической механикой, тех, которые удовлетворяют некоторым определенным условиям квантирования.

Это утверждение противоречит справедливости принципа суперпозиции для нелинейных колебаний (как и следовало этого ожидать) или, вернее, оно указывает на одно крайне любопытное следствие, которое вытекает из нелинейности колебаний.

Заметим мимоходом, что уравнение (7), которое явилось отправной точкой для вышесказанного заключения относительно квантирования амплитуд, было получено помощью одного специального и довольно сложного приема, имевшего целью добиться уничтожения секулярных членов в соответствующих разложениях. В связи с этим не безынтересно отметить, что если тот же прием для исчезновения секулярных членов применить к изучению колебаний в консервативных системах классической механики, то вышеупомянутое явление квантирования не имеет места (амплитуда зависит от произвольных постоянных интеграций так же, как и в линейном случае), но взамен этого получаются некоторые соотношения, выражающие собственные частоты в функции амплитуд, и таким образом в рассматриваемом случае периоды колебаний зависят от произвольных постоянных, т. е. для консервативных систем нелинейность выражается в потере изохронизма в противоположность тому, что происходит для систем, встречаемых в радио-технике.

Приступая теперь к изучению переходного режима осцилятора, получаем применением тех же методов и с той же степенью точности соотношения

$$e = B(\delta t)\cos\omega_f t, \quad \omega_f = \omega_1, \tag{10}$$

где δ — декремент затухания (соответствующий частоте ω_1) полного линейного контура и где $B(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dB}{dt} = r(\omega_1)f_1(B) - B, \tag{11}$$

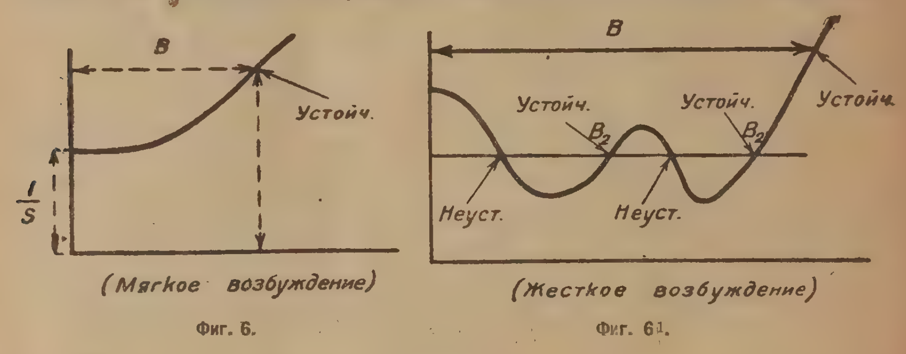
полученному помощью довольно сложных рассуждений.

Из уравнения (11) вытекает непосредственно, что когда одно из условий

$$r(\omega_1)f(B_0) > B_0, \; r(\omega_1)f(B_0) < B_0$$

имеет место, то как бы мало ни было начальное значение B_0 интеграла B, амплитуда $B(t)$ меняется монотонно, неограниченно приближаясь к одному из устойчивых стационарных значений, определенных помощью уравнения «квантирования», о котором говорилось выше.

Это уравнение (11) было получено для некоторых частных случаев и помощью нестрогих рассуждений ван дер Полем, который применил его



Фиг. 6. Фиг. 6[1].

к изучению некоторых свойств вынужденных колебаний, как например «колебательный гистерезис» (Phylosophical Magazine, 1922), заключающийся в возможности одновременного существования нескольких устойчивых режимов.

Из этого же уравнения (11) получается, между прочим, условие Баркгаузена

$$12) \qquad r(\omega_1)S \geqq 1, \text{ где } S = f_1'(0) = f'(E_0)$$

(который его получил помощью линейной теории) для того, чтобы явление самовозбуждения имело место, т. е. для того, чтобы вследствие начального случайного возбуждения, как бы мало оно ни было, величина амплитуды B начинала расти до первого стационарного устойчивого значения.

Заметим, между прочим, что многие из свойств (устойчивость, различные формы возбуждения) автоколебательных систем могут быть установлены надлежащим применением диаграммы, графически представляющей кривую (см. фиг. 6 и 6[1])

$$(13) \qquad y = \frac{f_1(B)}{B},$$

причем по мнению авторов этой статьи вышеупомянутая диаграмма представляет определенные преимущества по сравнению с хорошо известной диаграммой Möller (Elektronenrohren).

Выше были изложены результаты, относящиеся только к синусоидальным приближениям, которые являются особо полезными для практических вычислений в радио-технике, но, разумеется, недостаточны при современном состоянии этой науки, так как частота осцилятора зависит, как известно, от режимов, а вышеупомянутые синусоидальные приближения не выявляют эту зависимость. С другой стороны, чрезвычайное увеличение в настоящее время числа передающих радио-станций предъявляет настойчивые требования постоянства частот осциляторов, откуда вытекает необходимость вычисления частот помощью формул, возможно более точных для того, чтобы иметь определенное суждение о тех данных, которые обусловливают наиболее совершенным образом вышеупомянутое постоянство частот осциляторов.

Путем приложения методов авторов этой статьи и помощью довольно сложного анализа была получена следующая формула для вычисления частоты

$$\frac{z(\omega_f)}{r(\omega_f)} = \sum_{n=2}^{\infty} n \left[\frac{f_n(B)}{f_1(B)}\right]^2 \frac{z(n\omega_1)}{r(\omega_1)}. \tag{14}$$

Формула эта дает в явной форме искомую зависимость между частотою и режимом.

Для направляющего напряжения авторами было получено также следующее выражение

$$e = B\cos\omega_f t - \sum_{n=2}^{\infty} z(n\omega_1) f_n(B) \sin n\omega_f t. \tag{15}$$

В случае, наиболее часто встречающемся на практике, а именно, когда фактор обратной связи $K(j\omega)$ вещественный и почти не зависит от частоты (как, например, на схеме фиг. 4), получается после некоторых очевидных преобразований следующее заключение: фаза импеданса линейного контура анода равна сумме n-кратных безваттных мощностей n-й гармоники (начиная со второй), разделенной на ваттную мощность основной гармоники.

В явной форме результат этот может быть представлен следующей формулой

$$\varphi(\omega_f) = \sum_{n=2}^{\infty} n \left[\frac{f_n(B)}{f_1(B)}\right]^2 \frac{z_a(n\omega_1)}{r_a(\omega_1)},$$

где $\varphi(\omega)$ — угол фазы $R_a(j\omega)$ — импеданса полного линейного контура анода, $z_a(n\omega) = |R_a(jn\omega)| \sin\varphi(n\omega)$, $r_a(\omega_1) = |R_a(j\omega_1)|$, ибо здесь $\varphi(\omega_1) = 0$.

За отсутствием места здесь опущен ряд формул, полученных авторами в этом направлении и которые позволяют высказать ряд заключений, относящихся к важной проблеме устойчивости частоты.

Выше был рассмотрен сравнительно простой случай изолированного осцилятора с единственной частотой, где единственными стационарными решениями были периодические решения, для изучения которых методы Пуанкаре-Ляпунова являются применимыми.

Приступая теперь к изучению более сложных случаев, и по нашему мнению еще недостаточно изученных (где результаты, полученые аналитическим путем, могут, как нам кажется, дать указания для экспериментаторов), ограничимся простым перечислением, и притом сокращенным, результатов, полученных Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым при изучении функционирования осцилятора под действием внешней электродвижущей силы.

Полагая для определенности, что на сетку лампы приложено независимое возбуждение вида[1]

$$\varepsilon_g = E_g \cos \alpha t,$$

получаем после некоторых преобразований следующее символическое уравнение

$$e = R_k \text{ п. ч. } f(E_0 + \mathcal{E}_g + e), \tag{16}$$

причем e_a и e_g, будучи соответственно п. ч. (переменными частями) анодного и сеточного возбуждения, удовлетворяют следующим соотношениям

$$e_a = -\frac{1}{K-D} e, \quad e_g = \varepsilon_g + \frac{K}{K-D} e. \tag{17}$$

Помощью довольно сложных рассуждений акад. Н. М. Крылов и д-р Н. Н. Боголюбов, прилагая свои методы, установили:

1. Стационарные решения символического решения (16) являются квази-периодическими с двумя основными частотами α и ω_f так что

$$e = z(\alpha t, \omega_f t), \tag{18}$$

[1] Не смешивать этого E_g = амплитуды независимого возбуждения с E_g = сеточным напряжением, которое входило в предыдущие формулы этой статьи.

где $z(x, y)$ будет периодической функцией с периодом 2π по отношению каждой из переменных x и y.

Все другие решения будут асимптотичны к этим стационарным решениям.

Частота α, которая будет также частотою внешней силы, называется в последующем вынужденной частотой; частота ω_f, которая, как это можно доказать, является вообще близкой к ω_1 (собственная частота для линейного случая может быть названа поэтому собственной частотой, хотя в рассматриваемых случаях (нелинейность) она зависит, кроме собственных параметров контуров, еще и от внешней силы.

2. Среди вышеупомянутых стационарных решений находятся также такие, которые содержат только вынужденную частоту (и ее обертоны) и будут поэтому вида

$$e = z(\alpha t). \tag{19}$$

Решения этого типа могут быть названы гетеропериодическими, и изучение их свойств может быть выполнено методами Пуанкаре-Ляпунова (так как они являются периодическими), так же, как и методами авторов этой статьи.

Когда ω_1 находится вне области резонансов, т. е. когда не близко к $n\alpha$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то существует, очевидно один единственный гетеропериодический режим, которому соответствуют очевидные формулы, легко получаемые путем применения разных методов и которые опущены здесь за отсутствием места. Если напротив ω_1 лежит по соседству с этими числами $n\alpha$, то существует, вообще говоря, несколько гетеропериодических режимов. Для $\omega_1 \sim \alpha$, получается, например, в первом приближении такая формула

$$\varepsilon_g + e = L\cos(\alpha t + \psi),$$

где L и ψ определяются помощью следующих, всегда разрешимых уравнений

$$[r(\alpha) f_1(L) - L]^2 + \left[\frac{\omega - \alpha}{\delta}\right]^2 L^2 = \left\{1 + \left(\frac{\omega - \alpha}{\delta}\right)^2\right\} E_g^{\,2}$$

$$\psi = \theta - \xi, \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{\omega - \alpha}{\delta}\cdot\frac{L}{L - rf_1(L)}, \quad \operatorname{tg}\xi = \frac{\omega - \alpha}{\delta}.$$

Формулы эти для одной частной схемы осцилятора были получены также в одном из сообщений авторов в Парижской Академии Наук (том 194, стр. 1064).

3. Изучая детально гетеропериодические режимы, приходим к выводу, что при известных условиях режимы эти делаются неустойчивыми, так что достаточно произвольно малого начального возмущения, чтобы автоматически преобразовать гетеропериодический режим в другой, где собственная частота ω_1 (отличная от $n\alpha (n = 1, 2, \ldots)$ имеет место, и который поэтому может быть назван автопериодическим режимом.

Это явление представляет полную аналогию с тем, которое наблюдается в случае свободного осцилятора (функционирующего без внешнего независимого возбуждения), где под влиянием некоторых условий режимы равновесия делаются также неустойчивыми и дают место явлению самовозбуждения. Вот почему вышеупомянутое явление, в случае гетеропериодических режимов, также может быть названо явлением самовозбуждения. Надлежит, однако, отметить, что в рассматриваемом случае явление это чрезвычайно сложно и до сих пор не было еще достаточно изучено.

Авторами этой статьи были получены в этом направлении следующие результаты.

Если ω_1 (линейная частота) не находится по соседству с одной из точек

$$n\alpha, \quad n = 1, 1, \ldots \quad \text{и} \quad \left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

то условия «нормального» самовозбуждения будут таковы:

$$r(\omega_1)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(E_0 + E_g \cos t)\, dt > 1, \tag{20}$$

причем условие это для достаточно малого E_g (амплитуда внешнего независимого возбуждения) приводится к известному условию Баркгаузена для свободного осцилятора.

Если наоборот ω_1 будет находиться вблизи $n\alpha$, $n = 1, 2, \ldots$, то условия самовозбуждения, имея очень сложный вид, могут быть получены путем приложения методов Пуанкаре-Ляпунова и в частном случае специальной формы статической характеристики

$$\begin{aligned} f(E_g + DE_a) = S(E_g + DE_a) + \beta(E_g + DE_a)^2 + \\ + \gamma(E_g + DE_a) + \text{const}, \end{aligned} \tag{21}$$

принятой в своих исследованиях ван дер Полем, условия самовозбуждения были уже получены по сути в различных видах проф. Андроновым и проф.

Биттом (журн. «Прикладная физика», т. 7, № 4), а также авторами настоящей статьи (см. вышецитированное сообщение Парижской Академии Наук).

Для случая достаточно малого E_g и ω_1 близкого к α для какой угодно формы вышеупомянутой характеристики Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов получили следующий результат: если осцилятор в свободном состоянии не является самовозбужденным, то он продолжает оставаться в этом состоянии в случае применения внешнего независимого возбуждения достаточно малой амплитуды, что с физической точки зрения является очевидным. Если, напротив, осцилятор в свободном состоянии самовозбужден, то при внешнем независимом возбуждении малой амплитуды самовозбуждение будет иметь место только, если линейная частота находится вне интервала

$$\alpha - \frac{\delta E_g}{B} < \omega_1 < \alpha + \delta\frac{E_g}{B}, \tag{22}$$

где B наименьшая амплитуда стационарного устойчивого колебания в случае свободного осцилятора.

Внутри интервала (22), как бы мало ни было внешнее независимое возбуждение, самовозбуждение не имеет места.

Вышеформулированные условия затягивания являются, очевидно, более узкими, чем ранее упомянутое условие нормального возбуждения, и потому могут быть рассматриваемы, как условия анормально неблагоприятные. Надлежит заметить, что условия того же типа имеют место вблизи высших резонансов

$$\omega_1 \sim 2\alpha,\ 3\alpha,\ \ldots$$

Когда линейная частота ω_1 находится по соседству с точками

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha \quad n=0,\ 1,\ \ldots,$$

то условия нормального самовозбуждения имеют место только для значений, находящихся вне интервала

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha - Z_n < \omega_1 < \left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha + Z_n, \tag{23}$$

где

$$Z_n = \frac{\delta}{2\pi}\gamma\left|\int\limits_0^{2\pi} f\,(E_0 + E_g\cos t)\cos(2n+1)\,t\,dt\right|; \tag{24}$$

внутри же этого интервала (23) имеет место следующее условие самовозбуждения

$$(25)\quad 1-r(\omega_1)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^1(E_0+t_g\cos t)\,dt<\frac{\sqrt{Z_n^2-\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha-\omega_1\right]^2}}{\delta}$$

очевидно выполненное, если выполнено нормальное условие

$$1-r(\omega_1)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(E_0+E_g\cos t)\,dt<0$$

и потому могущее быть рассматриваемое, как условие анормально благоприятное для самовозбуждения собственных колебаний.

Из самого выражения для Z_n убеждаемся, что длина вышеупомянутых интервалов стремится к нулю для $n\longrightarrow\infty$.

Для E_g достаточно малых имеют место следующие приближенные формулы

$$2Z_0=|\delta f''(E_0)r|E_g,\quad 2Z_1=\left|\frac{\delta f''''(E_0)}{24}r\right|E_g^3$$

и внутри интервала

$$\frac{\alpha}{2}-Z_0<\omega_1<\frac{\alpha}{2}+Z_0,$$

который является наиболее широким среди всех вышеупомянутых интервалов условия затягивания, приближенно могут быть представлены в виде

$$1-rS<\sqrt{|f''(E_0)rE_g|^2-\left[\frac{\omega_1-\frac{\alpha}{2}}{\delta}\right]^2},$$

откуда вытекает, что осцилятор может быть не самовозбужден в свободном состоянии и в то же время самовозбужден в рассматриваемом случае приложения независимого возбуждения.

Только что высказанное свойство, относящееся к существованию условий анормально благоприятных для самовозбуждения собственных колебаний, по соседству с

$$\omega_1\sim\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha$$

является характеристическим свойством нелинейных систем и имеет место не только для осциляторов радио-техники, но также для систем, где не

имеются «трения с переменным знаком»; в этом и заключается причина того, почему в начале этой статьи в категорию нелинейных систем были включены также те, которым соответствуют линейные дифференциальные уравнения с переменными параметрами.

Взяв в качестве примера один из простейших типов таких систем, а именно колебательный слабо затухающий контур (система Томсоновского типа), слагающийся, напр., из постоянных самоиндукции L и сопротивления R и периодически меняющейся емкости C

$$C = C_m + \Delta C, \quad \frac{\Delta C}{C_m} = \sum_{n=1}^{\infty} G_n \cos n\alpha t, \tag{26}$$

где

$$\frac{\Delta C}{C_m}$$

достаточно мало, — убеждаемся после некоторых вычислений, что если

$$\left|\frac{G_{2n+1}}{2}\right| > \frac{R}{L\omega_1}, \tag{27}$$

то внутри интервала

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha - Z_n < \omega_1 < \left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha + Z_n, \tag{28}$$

где

$$Z_n = \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha}{2} \sqrt{\left[\frac{G_{2n+1}}{2}\right]^2 - \left[\frac{R}{L\omega_1}\right]^2} \tag{29}$$

имеют место явления самовозбуждения собственных колебаний с частотою, причем вычисление устойчивой амплитуды должно быть произведено, принимая во внимание нелинейность параметров контура.

Аналогичное явление имеет место также, когда меняется L и, наоборот, явление это места не имеет, если при постоянных L и C, R меняется без перемены знака.

То, что выше было сказано дает основание для вычисления помощью методов нелинейной механики проектов новых типов электрических машин, — генераторов электрических колебаний, принцип которых существенно отличается от классического принципа функционирования обычных электрических машин, ибо все здесь является основанным на соответствующем применении резонансов демультипликации частот.

4. Перечислим здесь некоторые результаты, недавно полученные проф. Н. М. Крыловым и д-р. Н. Н. Боголюбовым и касающиеся режимов устойчивых колебаний.

А) Если осцилятор в свободном состоянии может иметь устойчивые режимы, т. е. если «прямая сопротивлений»

$$y = r \tag{30}$$

пересекает кривую

$$y = \frac{B}{f_1(B)}, \tag{31}$$

то внутри интервала

$$\alpha - \frac{E_g}{B_s}\delta < \omega_1 < \alpha + \frac{E_g}{B_s}\delta \tag{32}$$

(где B_s — наибольшая из устойчивых амплитуд собственного колебания в свободном состоянии) квази-периодические (автопериодические) режимы не возможны и единственно возможные устойчивые стационарные режимы будут гетеропериодическими.

В этом интервале имеет место, таким образом, явление «Mitnehmen» вынужденной синхронизации,[1] состоящей в том, что частота собственных колебаний синхронизируется с вынужденной частотой.

Помощью математических рассуждений можно убедиться, что это явление имеет место, как бы мала ни была амплитуда независимого возбуждения, и по мере уменьшения этой амплитуды уменьшается также интервал синхронизации.

Это подтверждает в общем случае какой угодно схемы и произвольной характеристики мнение, высказанное проф. Андроновым и проф. Битт (см. ранее цитированные статьи) и проверенное с тех пор также экспериментом.

Б) Аналогичные явления имеют место и по соседству с высшими резонансами.

В предположении, что независимое возбуждение обладает малой амплитудой и что линейная частота ω_1 находится по соседству с $^n/_m\,\alpha$, Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов получили, прилагая их методы, следующие результаты: стационарные режимы устойчивых колебаний будут в этом случае возможны, причем имеет место следующая фор-

[1] «Захватывания» по терминологии школы акад. Мандельштама и проф. Папалекси.

мула (для каждого k вообще может иметь место несколько таких режимов с разными B_k и φ_k),

$$(33) \qquad e = \widetilde{B}_k \cos\left(\frac{n}{m}\alpha t + \varphi_k\right), \qquad k = 1, 2, \ldots s$$

где $\widetilde{B}_k$ близки соответственно к амплитудам $B_1, B_2, \ldots B_s$ собственных устойчивых колебаний, которыми обладает рассматриваемый осцилятор в свободном состоянии.

Внутри интервала «синхронизации»

$$(34) \qquad \frac{n}{m}\alpha - Z^{(k)}_{n,m} < \omega_1 < \frac{n}{m}\alpha + Z^{(k)}_{n,m},$$

где

$$(35) \qquad Z^{(k)}_{n,m} = \delta \frac{\max\limits_{0<\varphi<2\pi}\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f\left(E_0 + B_k\cos nt + E\cos m\left(t - \frac{\varphi}{n}\right)\right)\sin nt dt\right|}{f_1(B_k)}$$

амплитуда B_k и фаза φ_k постоянны. Другими словами, когда линейная частота меняется внутри интервала синхронизации, частота колебаний остается постоянной и равной $\frac{n}{m}$ части внешней частоты.

Когда линейная частота находится вне этого интервала $\widetilde{B}_k$ и φ_k делаются сразу периодическими так, что собственная частота как бы «освобождается» и появляются биения. Это явление вынужденной синхронизации по соседству с резонансами демультипликации, т. е. по соседству

$$\omega_1 \backsim \frac{n}{m}\alpha$$

было изучено для частных случаев и для $n = 1$, $m = 2$ Мандельштамом-Папалекси.

Наиболее важными из этих резонансов демультипликации будут те, которые соответствуют $n = 1$, т. е.

$$\frac{\alpha}{2}, \quad \frac{\alpha}{3}, \quad \ldots \frac{\alpha}{m} \ldots,$$

причем для ширины этих зон резонанса Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов получили следующее выражение

$$2m\delta\frac{f_m(B_k)}{f_1(B_k)}\cdot\frac{E_g}{B_k},$$

которое доказывает, что эта ширина пропорциональна E_g и декременту δ. Ширины других зон резонанса (соответствующих $n \neq 1$) будут уже пропорцианальны высшим степеням E.

Таким образом убеждаемся, что явление это будет тем более заметным, чем декремент δ больше, и уже на системах Томсоновского типа видно, что увеличение затухания благоприятно для демультипликации. Из сказанного ясно, почему явления демультипликации были сперва замечены именно на системах реляксационного типа, т. е. на системах с большим затуханием. Заметим кстати, что некоторые системы реляксационного типа были уже предметом глубоких работ Vito Volterra («Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie». Paris, 1931), остроумных исследований, выше уже цитированных, ван дер Поля и важной статьи Le Corbeiler («Les systèmes autoentretenus et les oscillations de relaxation». Conférences au Conservatoire National des Arts et Métiers le 6 et 7 Mai 1931), (где системы реляксационного типа сопоставляются с системами, дающими место синусоидальным колебаниям).

C) Рассмотрим случай, когда прямая сопротивлений (30) не пересекает кривой (31), но где, однако, достаточно малого приращения $\Delta\gamma$ эффективного сопротивления связи r для того, чтобы вышеупомянутая прямая пересекала кривую 31.

Пусть B_c — амплитуда устойчивого колебания осцилятора в свободном состоянии и соответствующая $r + \Delta r$.

Когда действует независимое возбуждение малой амплитуды и линейная частота находится по соседству с $\alpha/_m$, так, что

$$(36) \qquad \frac{\alpha}{m} - \delta m \frac{f_m(B)_c}{f_1(B_c)} \frac{E_g}{B_c} < \omega_1 < \frac{\alpha}{m} + \delta m \frac{f_m(B_c)}{f_1(B_c)} \frac{E_g}{B_c},$$

тогда, если

$$E_g \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_1 - \frac{\alpha}{m}}{Z_m}\right)^2} \frac{\frac{1}{\pi}\left|\int\limits_0^{2\pi} f'(E_0 + B_c \cos t) \cos mt \cos t dt\right|}{f_1(B_c)} > \frac{\Delta r}{r},$$

то можно утверждать существование режимов устойчивых колебаний (с частотою $\alpha/_m$), вида

$$e = \widetilde{B} \cos\left(\frac{\alpha}{m} t + \varphi\right),$$

где $\widetilde{B}$, φ не зависит от времени и B близко к $\widetilde{B}_c$.

Легко также убедиться, что в интервалах (36) имеют место условия, исключительно благоприятные для существования демультипликационных режимов, ибо внутри этих интервалов могут существовать демультипликационные режимы для таких значений фактора обратной связи, для которых сказанные режимы не возможны вне вышеупомянутых интервалов.

Аналогичные явления имеют место также по соседству с другими резонансами $\frac{n}{m}\alpha$. Ширины соответствующих зон тут могут быть также подчислены, причем оказывается, что они будут пропорциональны высшим степеням E_g. Вышеперечисленные результаты были получены Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым, как следствие ниже написанных формул, трактующих вопрос в первом приближении и которые представляют колебания по соседству с $\omega_1 \sim \frac{n}{m}\alpha$ помощью следующей формулы

$$e = A(\delta t)\cos\left\{\frac{n}{m}\alpha t + \varphi(\delta t)\right\}, \tag{37}$$

где $A(\theta)$ и $\varphi(t)$ удовлетворяют таким дифференциальным уравнениям

$$\frac{dA}{dt} = rF(A, \varphi) - A, \quad A\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\omega - \frac{n}{m}\alpha}{\delta}A - r\Phi(A, \varphi), \tag{38}$$

причем

$$F(A, \varphi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\left\{E_0 + A\cos nt + E_g\cos\left(mt - \frac{m}{n}\varphi\right)\right\}\cos nt\,dt$$

$$\Phi(A, \varphi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\left\{E_0 + A\cos nt + E_g\cos\left(mt - \frac{m}{n}\varphi\right)\right\}\sin nt\,dt$$

помощью этих формул можно также детально исследовать различные переходные режимы, равно как амплитуду колебания в функции E_g в различных резонансных зонах.

Для краткости изложения в предшествующем было принято допущение существования одной только линейной частоты, но это никоим образом не представляет существенного ограничения, и методы авторов этой статьи применяются также для исследования тех случаев, когда для осцилятора, даже в свободном состоянии, могут иметь место квази-периодические режимы.

Кроме того, теми же методами[1] можно исследовать влияние сеточного тока в проблеме «параметрической» стабилизации собственной частоты и т. д. За отсутствием места все эти результаты не были перечислены в этой статье, главная цель которой заключалась в том, чтобы привлечь внимание исследователей на основании нелинейной механики в ее приложении к радио-технике.

Результаты полученных помощью методов, использованных в этой статье, могут иногда итти впереди эксперимента и потому оказать свое содействие ориентации экспериментальных исследований.

В заключение заметим, что методы нелинейной механики, вводя в рассмотрение некоторые схемы для получения дискретных спектров, могут быть с особой пользой применены также и в области квантовой механики.

Киев, 5 VIII 1932

---

[1] Применение этих методов к вопросу о продольной устойчивости аэроплана составило предмет особой монографии, которая в скором времени должна появиться в печати.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1933
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

ÜBER EINIGE FUNKTIONEN, WELCHE IN ZWEI GEGEBENEN INTERVALLEN AM WENIGSTEN VON NULL ABWEICHEN

Von N. ACHYESER

(*Presenté par* S. Bernstein, *membre de l'Académie*)

III TEIL*

VI Kapitel

Über das asymptotische Verhalten der Grösse $m_n[s(x)]$

§ 22. **Hilfssatz.** Im vorigen Kapitel haben wir uns ausschliesslich mit dem Falle beschäftigt, wo die Belegungsfunktion eine ganze rationale Funktion war. Der allgemeine Fall einer beliebigen Belegungsfunktion $s(x)$ bietet natürlich grössere Schwierigkeiten, aber auch in diesem Falle kann man die Frage erledigen nach dem asymptotischen Verhalten der Grösse $m_n[s(x)]$, falls $n \to \infty$. Ehe wir dazu übergehen, wollen wir eine von S. N. Bernstein herrürende [17] Bemerkung vorausschicken.

Es sei $s(x)$ irgend eine stetige und in $\mathcal{E}$ nicht verschwindende reelle Belegungsfunktion. Dem Weierstrasschen Approximationssatze zufolge existieren für jedes $\varepsilon > 0$ reelle und ebenfalls in $\mathcal{E}$ nicht verschwindende Polynome $s_l(x)$ von genügend hohen Potenzen l, für welche in $\mathcal{E}$:

$$(61) \qquad \left|1 - \frac{s_l(x)}{s(x)}\right| < \varepsilon, \quad \left|1 - \frac{s(x)}{s_l(x)}\right| < \varepsilon.$$

Es seien $P_n(x)$ und $P_n^{(l)}(x)$ die verallgemeinerten Tschebyscheffschen Polynome n-ten Grades für die Punktmenge $\mathcal{E}$ in bezug auf die Belegungsfunktionen $s(x)$ und $s_l(x)$, so dass

$$(a) \qquad m_n[s(x)] = \max_{x \lessgtr \mathcal{E}} |P_n(x) \cdot s(x)|, \quad m_n[s_l(x)] = \max_{x \lessgtr \mathcal{E}} |P_n^{(l)}(x) s_l(x)|.$$

* Siehe BAS-MN 1933, № 3, S. 309.

[17] S. Bernstein, Leçons sur les propriétés extrémales..., p. 24—25.

Beachtet man die aus (61) folgenden Ungleichungen

$$|P_n(x)s(x) - P_n(x)s_l(x)| < \varepsilon'|P_n(x)s(x)|,$$

$$|P_n^{(l)}(x)s_l(x) - P_n^{(l)}(x)s(x)| < \varepsilon|P_n^{(l)}(x)s_l(x)|,$$

so ergibt sich nach (a), dass für jedes n:

$$m_n[s_l(x)] \leqslant \max_{x \lessgtr \mathcal{E}} |P_n(x)s_l(x)| < (1+\varepsilon)m_n[s(x)],$$

$$m_n[s(x)] \leqslant \max_{x \lessgtr \mathcal{E}} |P_n^{(l)}(x)s(x)| < (1+\varepsilon)m_n[s_l(x)]$$

oder

(62) $$1-\varepsilon < \frac{m_n[s(x)]}{m_n[s_l(x)]} < \frac{1}{1-\varepsilon}.$$

Beachtet man noch die Formel (60), so ergibt sich der

Hilfssatz. Sind die beiden reellen Belegungsfunktionen $s(x)$ und $t(x)$ in $\mathcal{E}$ von Null verschieden und besteht in $\mathcal{E}$ die Ungleichung

$$1-\varepsilon < \left|\frac{s(x)}{t(x)}\right| < \frac{1}{1-\varepsilon},$$

so ist für jedes n:

$$1-\varepsilon < \frac{m_n[s(x)]}{m_n[t(x)]} < \frac{1}{1-\varepsilon}$$

und ausserdem

$$1-\varepsilon < \frac{e^{\frac{1}{\pi}\int_{\mathcal{E}} \log|s(x)| \frac{|x-\gamma|\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(\alpha-x)(\beta-x)}}}}{e^{\frac{1}{\pi}\int_{\mathcal{E}} \log|t(x)| \frac{|x-\gamma|\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(\alpha-x)(\beta-x)}}}} < \frac{1}{1-\varepsilon}.$$

§ 23. Asymptotisches Verhalten der Grösse $m_n[s(x)]$.

Satz X. Ist $s(x)$ eine stetige und in $\mathcal{E}$ nicht verchwindende reelle Belegungsfunktion, so hat jede Häufungsstelle der Zahlenmenge

(a) $$\frac{m_n[s(x)]}{2\tau^n e^{\frac{1}{\pi}\int_{\mathcal{E}} \log|s(x)| \frac{|x-\gamma|\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(\alpha-x)(\beta-x)}}}}$$

die Gestalt

$$\frac{\Theta(\rho+\sigma)}{\Theta(\rho-\sigma)}$$

mit einem der Ungleichung $-K < \sigma \leqslant 0$ genügenden σ.

Beweis. Ich setze zur Abkürzung der Schreibweise

$$e^{\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathcal{E}} \log|s(x)| \frac{|x-\gamma|\, dx}{\sqrt{(1-x^2)(\alpha-x)(\beta-x)}}} = \mathfrak{M}[s(x)].$$

Ist ξ irgend eine Häufungsstelle der Zahlenmenge (a), so existiert für jede Genauigkeitsgrenze $\delta > 0$ eine unendliche Exponentenfolge, für welche:[18]

$$\text{(b)} \qquad (1-\delta)^{1/4} < \frac{2\xi\tau^n \mathfrak{M}[s(x)]}{m_n[s(x)]} < (1-\delta)^{-1/4}.$$

Es bezeichne $s_l(x)$ ein reelles in $\mathcal{E}$ nicht verschwindendes Polynom vom Grade l, für welches in $\mathcal{E}$:

$$(1-\delta)^{1/4} < \left|\frac{s_l(x)}{s(x)}\right| < (1-\delta)^{-1/4}.$$

Aus dem Hilfssatze folgt daher, dass

$$\text{(c)} \qquad \begin{aligned} &(1-\delta)^{1/4} < \frac{m_n[s_l(x)]}{m_n[s(x)]} < (1-\delta)^{-1/4}, \\ &(1-\delta)^{1/4} < \frac{\mathfrak{M}[s_l(x)]}{\mathfrak{M}[s(x)]} < (1-\delta)^{-1/4}. \end{aligned}$$

Wegen (c) nimmt (b) die Gestalt

$$\text{(d)} \qquad (1-\delta)^{3/4} < \frac{2\xi\tau^n \mathfrak{M}[s_l(x)]}{m_n[s_l(x)]} < (1-\delta)^{-3/4}$$

an. Diese Ungleichung ist für alle n erfüllt, welche der oben erwähnten Exponentenfolge gehören. Nach dem Satze VIII ist aber für genügend grosse n:

$$\text{(e)} \qquad (1-\delta)^{1/4} < \frac{2\tau^n \mathfrak{M}[s_l(x)]}{m_n[s_l(x)]} \frac{\Theta(\rho+\sigma_l)}{\Theta(\rho-\sigma_l)} < (1-\delta)^{-1/4},$$

wo $\sigma_l (-K < \sigma_l \leqslant 0)$ von n und $s_l(x)$, mit anderen Worten, von n und δ abhängt.

[18] Hier ist still vorausgesetzt, dass ξ endlich und von Null verschieden ist. Aber aus der Betrachtung dieses Falles ergibt sich ohne Weiteres, dass ξ notwendig endlich und von Null verschieden sein muss, so dass andere Fälle nicht betrachtet werden können.

Aus (d) und (e) folgt, dass für jedes $\delta > 0$ ein solches der Ungleichung $-K < \sigma_l \leqslant 0$ genügendes σ_l existiert, dass

$$1 - \delta < \xi \frac{\Theta(\rho - \sigma_l)}{\Theta(\rho + \sigma_l)} < \frac{1}{1 - \delta}.$$

Da ξ fest ist, so strebt für $\delta \to 0$ die Grösse σ_l gegen einen bestimmten Grenzwert σ, welcher ebenfalls der Ungleichung $-K < \sigma \leqslant 0$ genügt. Für dieses σ ist aber

$$\xi = \frac{\Theta(\rho + \sigma)}{\Theta(\rho - \sigma)}.$$

Satz XI. Ist die nur von $\mathcal{E}$ abhängende Zahl $-\frac{\rho}{K} = R$ irrational und ist $s(x)$ eine beliebige stetige und in $\mathcal{E}$ nicht verschwindende reelle Belegungsfunktion, so existiert für jede der Ungleichung

$$-K < \omega \leqslant 0$$

genügende Zahl ω eine solche unendliche Folge $n_1, n_2, n_3, \ldots$, dass für $i \to \infty$:

$$m_{n_i}[s(x)] \sim 2 \frac{\Theta(\rho + \omega)}{\Theta(\rho - \omega)} \tau^{n_i} e^{\frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathcal{E}} \log|s(x)| \frac{|x - \gamma|\, dx}{\sqrt{(1 - x^2)(\alpha - x)(\beta - x)}}}.$$

Beweis. Für jede Genauigkeitsgrenze $\delta > 0$ existiert ein solches in $\mathcal{E}$ nicht verschwindendes Polynom $s_l(x)$, dass in $\mathcal{E}$:

$$(1 - \delta)^{1/3} < \left| \frac{s_l(x)}{s(x)} \right| < (1 - \delta)^{-1/3}$$

und also nach dem Hilfssatze:

$$\text{(f)} \quad \begin{aligned} (1 - \delta)^{1/3} &< \frac{m_n[s_l(x)]}{m_n[s(x)]} < (1 - \delta)^{-1/3}, \\ (1 - \delta)^{1/3} &< \frac{\mathfrak{M}[s_l(x)]}{\mathfrak{M}[s(x)]} < (1 - \delta)^{-1/3}. \end{aligned}$$

Ferner wissen wir nach dem Satze IX, dass es eine unendliche Folge $n_1, n_2, \ldots$ gibt, für welche

$$(1 - \delta)^{1/3} < \frac{2\tau^n \mathfrak{M}[s_l(x)]}{m_n[s_l(x)]} \frac{\Theta(\rho + \omega)}{\Theta(\rho - \omega)} < (1 - \delta)^{-1/3};$$

aus (f) folgt daher, dass für diese Exponentenfolge:

$$1-\delta < \frac{2\tau^n \mathfrak{M}[s(x)]}{m_n[s(x)]} \frac{\Theta(\rho+\omega)}{\Theta(\rho-\omega)} < \frac{1}{1-\delta}.$$

Es sei jetzt $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ eine nach Null konvergierende Folge positiver Zahlen. Nach dem bewiesenen existiert für jedes δ_i eine unendliche Exponentenfolge

$$n_1^{(i)},\ n_2^{(i)},\ n_3^{(i)},\ \ldots,$$

welche die Eigenschaft besitzt, dass für sie

$$1-\delta_i < \frac{2\tau^n \mathfrak{M}[s(x)]}{m_n[s(x)]} \frac{\Theta(\rho+\omega)}{\Theta(\rho-\omega)} < \frac{1}{1-\delta_i}.$$

Daraus folgt, dass für die Diagonalfolge

$$n_1^{(1)},\ n_2^{(2)},\ n_3^{(3)},\ \ldots$$

die Beziehung

$$\frac{2\tau^n \mathfrak{M}[s(x)]}{m_n[s(x)]} \frac{\Theta(\rho+\omega)}{\Theta(\rho-\omega)} \to 1$$

bestehen wird, was unserer Behauptung äquivalent ist.

Satz XII. Ist die Zahl $R=-\frac{\rho}{K}$ rational und hat sie nach der Vereinfachung die Gestalt $R=\frac{P}{Q}$, so existieren für jede Belegungsfunktion $s(x)$ vom oben besprochenen Typus Q Grössen

$$\sigma^{(0)},\ \sigma^{(1)},\ \sigma^{(2)},\ \ldots,\ \sigma^{(Q-1)}$$

welche der Ungleichung

$$-K < \sigma^{(\mu)} \leqslant 0 \qquad (\mu=0,1,\ldots,Q-1)$$

genügen und derart sämtlichen Restklassen nach dem Modul Q entsprechen, dass für jede aus allen nach dem Modul Q untereinander kongruenten Zahlen bestehende Exponentenfolge eine der folgenden Q asymptotischen Beziehungen bestehen wird

$$m_n[s(x)] \backsim 2\,\frac{\Theta(\rho+\sigma^{(\mu)})}{\Theta(\rho-\sigma^{(\mu)})}\,\tau^n\, e^{\frac{1}{\pi}\int\limits_{\varepsilon} \log|s(x)| \frac{|x-\gamma|\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(\alpha-x)(\beta-x)}}} \qquad (\mu=0,1,2,\ldots,Q-1).$$

Beweis. Nach dem Satze X wissen wir, dass alle Häufungsstellen der Zahlenmenge

$$\text{(g)} \qquad \frac{m_n[s(x)]}{2\tau^n \mathfrak{M}[s(x)]}$$

die Gestalt $\frac{\Theta(\rho+\sigma)}{\Theta(\rho-\sigma)}$ haben, wo $-K < \sigma \leqslant 0$, unabhängig davon, welche Folge n durchläuft. Wir müssen daher zeigen, dass die Zahlenmenge (g) nicht mehr als eine Häufungsstelle haben kann, wenn n eine solche Folge durchläuft, welche aus allen nach dem Modul Q untereinander kongruenten Zahlen besteht. Zum Beweise nehmen wir den Gegenteil an, und zwar sei

$$\text{(h)} \quad \lim_{i\to\infty} \frac{m_{n_i'}[s(x)]}{2\tau^{n_i'} \mathfrak{M}[s(x)]} = \frac{\Theta(\rho+\sigma')}{\Theta(\rho-\sigma')}, \quad \lim_{i\to\infty} \frac{m_{n_i''}[s(x)]}{2\tau^{n_i''} \mathfrak{M}[s(x)]} = \frac{\Theta(\rho+\sigma'')}{\Theta(\rho-\sigma'')};$$

wo alle Zahlen n_i', n_i'' untereinander nach dem Modul Q kongruent sind und

$$\frac{\Theta(\rho+\sigma')}{\Theta(\rho-\sigma')} \neq \frac{\Theta(\rho+\sigma'')}{\Theta(\rho-\sigma'')}.$$

Es sei $\delta > 0$ eine beliebige Genauigkeitsgrenze und $s_l(x)$ ein Polynom, für welches in $\mathcal{E}$:

$$(1-\delta)^{1/6} < \left|\frac{s_l(x)}{s(x)}\right| < (1-\delta)^{-1/6}.$$

Nach dem Satze IX gibt es eine bestimmte Zahl $\sigma_l^{(\nu)}$ und eine Schranke $N(\delta)$, dass

$$\text{(i)} \quad \begin{aligned} (1-\delta)^{1/6} &< \frac{m_{n_i'}[s_l(x)]}{2\tau^{n_i'} \mathfrak{M}[s_l(x)]} \frac{\Theta(\rho-\sigma_l^{(\nu)})}{\Theta(\rho+\sigma_l^{(\nu)})} < (1-\delta)^{-1/6}, \\ (1-\delta)^{1/6} &< \frac{m_{n_i''}[s_l(x)]}{2\tau^{n_i''} \mathfrak{M}[s_l(x)]} \frac{\Theta(\rho-\sigma_l^{(\nu)})}{\Theta(\rho+\sigma_l^{(\nu)})} < (1-\delta)^{-1/6}. \end{aligned}$$

falls nur die (der oben betrachteten Restklasse mod. Q angehörenden) Exponenten n_i', n_i'' die Ungleichungen

$$n_i' > N(\delta), \; n_i'' > N(\delta)$$

befriedigen.

Aus (i) folgt, dass

$$(1-\delta)^{1/3} < \frac{m_{n_i'}[s_l(x)]}{m_{n_i''}[s_l(x)]} \frac{\tau^{n_i''}}{\tau^{n_i'}} < (1-\delta)^{-1/3}$$

und also nach dem Hilfssatze:

$$(1-\delta)^{2/3} < \frac{m_{n_i'}[s(x)]}{m_{n_i''}[s(x)]} \frac{\tau^{n_i''}}{\tau^{n_i'}} < (1-\delta)^{-2/3}.$$

Daraus ergibt sich nach (h), falls nur n_i' und n_i'' genügend gross sind, dass

$$1-\delta < \frac{\Theta(\rho+\sigma')}{\Theta(\rho-\sigma')} \frac{\Theta(\rho-\sigma'')}{\Theta(\rho+\sigma'')} < \frac{1}{1-\delta}.$$

Da diese Ungleichung für jedes noch so kleine $\delta > 0$ bestehen muss, so ist

$$\frac{\Theta(\rho+\sigma')}{\Theta(\rho-\sigma')} = \frac{\Theta(\rho+\sigma'')}{\Theta(\rho-\sigma'')},$$

was unserer Voraussetzung widerspricht. Damit ist der Satz bewiesen.

VII Kapitel

Über asymptotische Grösse der besten in $\mathcal{E}$ Annäherung einiger analytischen Funktionen durch Polynome

§ **24. Einleitung.** In zahlreichen Arbeiten über Approximation einer reellen Funktion in einem Intervalle hat S. Bernstein den Zusammenhang untersucht, welcher zwischen dem Abnehmen der besten polynomialen Annäherung und den Stetigkeitseigenschaften einer Funktion besteht; dabei hat er für viele analytische Funktionen mit typischen Singularitäten explizite einen asymptotischen Ausdruck für die beste Annäherung gefunden. Es erwies sich, dass das Hauptglied (für $n \to \infty$) der besten Annäherung durch diejenigen Singularitäten der Funktionen bestimmt wird, welche auf der kleinsten Ellipse mit den Brennpunkten in den Enden der Strecke gelegen sind.

Geht man zur Approximation in zwei Intervallen über, so werden diese homofokalen Ellipsen durch die von uns eingeführten (vgl. § 6) N-Kurven ersetzt. In diesem Kapitel wollen wir einige hierzu gehörende Aufgaben näher betrachten, um an Beispielen zu zeigen, wie sich die Tatsachen verwickeln, falls man von einer Strecke zur Punktmenge $\mathcal{E}$ übergeht.

§ **25. Über die beste in $\mathcal{E}$ Annäherung der Funktion $\frac{1}{x-a}$.** Es sei a irgend eine feste der Punktmenge $\mathcal{E}$ nicht angehörende reelle Grösse.

Wir nehmen die Funktion $\frac{1}{x-a}$ und wollen das Verhalten von $E_n\left[\frac{1}{x-a}\right]$, [d. h. der Grösse der besten in $\mathcal{E}$ Annäherung der Funktion $\frac{1}{x-a}$ durch Polynome n-ten Grades], für grosse Werte des Exponenten n untersuchen.

Ausführlich wollen wir nur denjenigen Fall behandeln, in welchem

$$\text{(a)} \qquad \alpha < a < \beta.$$

Für den zweiten Fall ($a^2 > 1$), dessen Untersuchung im Wesentlichen ebenso verläuft, wie die Untersuchung des ersten Falles, werden wir nur das definitive Ergebniss ohne Beweis aussprechen.

1⁰. Man nehme zunächst die vermöge (1) und (2) bestimmten Zahlen $\varkappa$ und ρ, ersetze die Veränderliche x durch u vermöge (5) und stelle die Grösse a in der Gestalt

$$a = \alpha + \frac{1-\alpha^2}{2sn^2(r+iK')+\alpha-1} \tag{63}$$

dar, wobei wegen (a):

$$-K < r < 0.$$

Man bestimme ferner aus der Gleichung

$$-n\rho - r = pK - \sigma \tag{64}$$

die naturale Zahl p und die der Ungleichung

$$-K < \sigma \leqslant 0$$

genügende Grösse σ (p und σ sind gewisse Funktionen von n).

Nach diesen Vorbereitungen führe man die Funktion

$$\text{(65}_1\text{)} \qquad \begin{aligned} y(x) = (-1)^{n-p-1}\frac{\lambda_n}{2}\Bigg\{&\left[\frac{H(\rho+u)}{H(\rho-u)}\right]^n \frac{\theta(r+u)}{\theta(r-u)}\frac{H(\sigma-u)}{H(\sigma+u)} + \\ &+\left[\frac{H(\rho-u)}{H(\rho+u)}\right]^n \frac{\theta(r-u)}{\theta(r+u)}\frac{H(\sigma+u)}{H(\sigma-u)}\Bigg\} \end{aligned}$$

ein, wo

$$\text{(65}_2\text{)} \qquad \lambda_n = \frac{\beta-\alpha}{2(a-\alpha)(\beta-a)}\frac{\theta^2(0)\,\theta_1^2(0)}{\theta^2(r)\,\theta_1^2(r)}\frac{\theta(r+\sigma)}{\theta(r-\sigma)}\left[\frac{\theta(\rho-r)}{\theta(\rho+r)}\right]^n.$$

Eine leichte Rechnung zeigt, dass:

(66) $$y(x) = \frac{1}{x-a} + \frac{B}{x-b} - Q_n(x),$$

wobei

$$b = \alpha + \frac{1-\alpha^2}{2sn^2\sigma + \alpha - 1},$$

(b) $$B = (-1)^{n-p-1}\lambda_n(b^2-1)\frac{\theta(r-\sigma)}{\theta(r+\sigma)}\frac{\theta^2(\sigma)\,\theta_1^2(\sigma)}{\theta^2(0)\,\theta_1^2(0)}\left[\frac{H(\rho-\sigma)}{H(\rho+\sigma)}\right]^n$$

und $Q_n(x)$ bezeichnet ein reelles Polynom vom Grade n. Aus (b) folgt, dass $B=0$, wenn $\sigma=0$ oder $\sigma=\rho$; in anderen Fällen ist $B \neq 0$ und $b^2>1$.

Nun ist $y(x)$ ein Speziellfall der im § 5 untersuchten rationalen Funktion $r(x)$, wobei für $y(x)$:

$$\mathsf{M} = n+1,\ \mathsf{M}_0 = 1,\ \mathsf{N} = 1,\ \mathsf{N}_0 = 0,\ \text{falls}\ B \neq 0,$$

$$\mathsf{M} = n+1,\ \mathsf{M}_0 = 1,\ \mathsf{N} = \mathsf{N}_0 = 0,\ \text{falls}\ \sigma = 0,$$

$$\mathsf{M} = n,\ \mathsf{M}_0 = 1,\ \mathsf{N} = \mathsf{N}_0 = 0,\ \text{falls}\ \sigma = \rho$$

und im Falle $\sigma=\rho$ hat das Polynom $Q_n(x)$ den Grad $n-1$.

Beachtet man die fundamentale Eigenschaft der Funktion $r(x)$, so ergibt sich, dass $\max\limits_{x \lessgtr \mathcal{E}} |y(x)| = \lambda_n$ und dass die Gesamtanzahl der Abweichungsstellen der Funktion $y(x)$ in $\mathcal{E}$ für die drei Möglichkeiten

$$B \neq 0,\ \sigma = 0,\ \sigma = \rho$$

bzw. nicht kleiner als

$$n+2,\ n+3,\ n+2$$

sein kann, wobei in allen drei Fällen

$$y(\beta) = -y(\alpha) = \pm\lambda_n.$$

Nun folgt aber aus (b), dass:

$$\varepsilon_n = \frac{\max\limits_{x \lessgtr \mathcal{E}}\left|\frac{B}{x-b}\right|}{\lambda_n} < 2\,|b|\,\frac{\theta(r-\sigma)}{\theta(r+\sigma)}\frac{\theta^2(\sigma)\,\theta_1^2(\sigma)}{\theta^2(0)\,\theta_1^2(0)}\left|\frac{H(\rho-\sigma)}{H(\rho+\sigma)}\right|^n,$$

während nach dem Satze I und (66):

$$\left|\frac{E_n\left[\frac{1}{x-a}\right]}{\lambda_n}-1\right|<\varepsilon_n, \quad \left|\frac{\max\limits_{x\lessgtr\mathcal{E}}\left|\frac{1}{x-a}-Q_n(x)\right|}{\lambda_n}-1\right|<\varepsilon_n;$$

durchläuft daher n eine solche unendliche Folge, für welche entweder $B=0$ oder $-K+\delta<\sigma<-\delta$ (mit einem festen $\delta>0$), so ist für diese Folge $\varepsilon_n\to 0$ und also liefert in bezug auf diese Folge das Polynom $Q_n(x)$ asymptotisch die beste in $\mathcal{E}$ Annäherung der Funktion $\frac{1}{x-a}$.

Es ist noch zu bemerken, dass in allen Fällen, wo $B=0$, das eben definierte Polynom $Q_n(x)$ nicht nur angenähert (asymptotisch), sondern sogar genau die beste Annäherung liefern wird; und es ist zwar leicht zu zeigen, dass

$$E_n\left[\frac{1}{x-a}\right]=E_{n+1}\left[\frac{1}{x-a}\right]=\max_{x\lessgtr\mathcal{E}}\left|\frac{1}{x-a}-Q_n(x)\right|=\lambda_n,$$

falls für das betrachtete n die Grösse σ gleich Null ist, und

$$E_{n-1}\left[\frac{1}{x-a}\right]=E_n\left[\frac{1}{x-a}\right]=\max_{x\lessgtr\mathcal{E}}\left|\frac{1}{x-a}-Q_{n-1}(x)\right|=\lambda_{n-1}=\lambda_n,$$

falls für das betrachtete n:

$$\sigma=\rho.$$

2°. Ist für irgend ein n die Grösse σ gleich Null, so dass für dieses n

$$-n\rho-r=pK,$$

so kann man die Funktion $y(x)$, welche wir in diesem Falle durch $y_0(x)$ bezeichnen wollen, in folgender Gestalt darstellen:

(c) $$y_0(x)=(-1)^{n-p-1}\frac{\lambda_n}{2}\left\{\left[\frac{H\left(\frac{r+pK}{n}-u\right)}{H\left(\frac{r+pK}{n}+u\right)}\right]^n\frac{\theta(r+u)}{\theta(r-u)}+\right.$$
$$\left.+\left[\frac{H\left(\frac{r+pK}{n}+u\right)}{H\left(\frac{r+pK}{n}-u\right)}\right]^n\frac{\theta(r-u)}{\theta(r+u)}\right\},$$

(1) $$\varkappa^2=\frac{2(\beta-\alpha)}{(1-\alpha)(1+\beta)},$$

(d) $$a = \frac{sn^2(r+iK')\,cn^2\frac{r+pK}{n} + cn^2(r+iK')\,sn^2\frac{r+pK}{n}}{sn^2(r+iK') - sn^2\frac{r+pK}{n}},$$

(e) $$x = \frac{sn^2 u\cdot cn^2\frac{r+pK}{n} + cn^2 u\cdot sn^2\frac{r+pK}{n}}{sn^2 u - sn^2\frac{r+pK}{n}}.$$

Diese Formeln zeigen, dass $y_0(x)$ als Funktion von x, a, n, p und $\varkappa$ angesehen werden kann: $y_0(x) = y_n(x, a; p, \varkappa)$. Wir können und wollen diese Funktion etwas verallgemeinern und auf neuem Wege konstruiert denken.

Dazu wollen wir nicht von der Punktmenge $\mathcal{E}$, sondern von der die Ungleichung:

$$-1 < a < 1$$

befriedigenden Grösse a ausgehen und anstatt der Zahl

$$\varkappa = \sqrt{\frac{2(\beta-\alpha)}{(1-\alpha)(1+\beta)}}$$

eine beliebige der Ungleichung $0 < k < 1$ genügende Zahl k als Modul der elliptischen Funktionen annehmen. Ferner nehmen wir irgend eine den Ungleichungen

(f) $$1 \leqslant m \leqslant n-1.$$

(g) $$1 - 2sn^2\left(\frac{m}{n}\mathcal{K};\ k\right) < a < 2sn^2\left(\frac{n-m+1}{n}\mathcal{K};\ k\right) - 1$$

genügende ganze Zahl m [wobei n so gross vorausgesetzt sei, dass die Ungleichungen (g) mit (f) verträglich seien].

Jetzt kann man aus

(h) $$a = \frac{sn^2(r+i\mathcal{K}';k)\,cn^2\left(\frac{r+m\mathcal{K}}{n};\ k\right) + cn^2(r+i\mathcal{K}';k)\,sn^2\left(\frac{r+m\mathcal{K}}{n};\ k\right)}{sn^2(r+i\mathcal{K}';k) - sn^2\left(\frac{r+m\mathcal{K}}{n};\ k\right)}$$

eine Zahl r bestimmen, für welche nach (g):

$$-\mathcal{K} < r < 0,$$

und demnach vermöge (c) und (e) [unter gewissen, Abänderung der Konstanten λ_n] die parametrische Darstellung von $y_n(x, a; m, k)$ gewinnen,

wenn man in (c) und (e) die Zahl p durch m, die Grösse $\varkappa$ durch k und das elliptische Integral K durch $\mathcal{K}$ ersetzt. Die so entstandene Funktion $y_n(x, a; m, k)$ soll als zugeordnete für $y(x)$ bezeichnet werden.

Führt man noch die Zahlen

$$a_m = 1 - 2sn^2\left(\frac{r + m\mathcal{K}}{n}; k\right), \quad b_m = 2\frac{cn^2\left(\frac{r + m\mathcal{K}}{n}; k\right)}{dn^2\left(\frac{r + m\mathcal{K}}{n}; k\right)} - 1$$

ein und beachtet man, dass wegen (g) und (h):

$$a_m < a < b_m,$$

so ergibt sich, dass

$$y_n(x, a; m, k) = \frac{1}{x - a} - Q_n(x; m, k)$$

in bezug auf E_m:

$$\langle -1, a_m \rangle, \quad \langle b_m, 1 \rangle$$

eine solche Rolle spielt, wie im Falle $\sigma = 0$ die Funktion $y_0(x)$ in bezug auf $\mathcal{E}$.

Diese Bemerkung und die früher bei anderen Aufgaben oft angewandte Methode erlauben auch diejenigen Fälle unserer Aufgabe zu behandeln, in welchen $\sigma \to 0$ oder $\sigma \to -K$ [falls n ins Unendliche wächst]. Somit entsteht der folgende Satz, dessen Beweis dem Leser überlassen werden mag.

Satz XIII. Genügt die Grösse a der Ungleichung

$$\alpha < a < \beta,$$

so besteht die asymptotische Gleichung

$$(67) \quad E_n\left[\frac{1}{x - a}\right] \sim \frac{\beta - \alpha}{2(a - \alpha)(\beta - a)} \frac{\theta^2(0)\,\theta_1^2(0)}{\theta^2(r)\,\theta_1^2(r)} \frac{\theta(r + \sigma)}{\theta(r - \sigma)} \left[\frac{\theta(\rho - r)}{\theta(\rho + r)}\right]^n,$$

wo $\varkappa$, ρ, r und σ aus (1), (2), (63) und (64) zu bestimmen sind.

Um dabei für jedes n ein Polynom n-ten Grades

$$Q_n(x, a)$$

zu konstruieren, für welches

$$(68) \qquad \max_{x \lessgtr \mathcal{E}} \left|\frac{1}{x - a} - Q_n(x, a)\right| \sim E_n\left[\frac{1}{x - a}\right],$$

genügt es den Modul k_1 aus dem System

$$2sn^2\left[\frac{(n-p)\mathcal{K}_1 - r_1}{n};\, k_1\right] - 1 = \beta,$$

$$a = \beta - \frac{1-\beta^2}{2sn^2(r_1 + \mathcal{K}_1 + i\mathcal{K}_1';\, k_1) - \beta - 1}$$

und den Modul k_2 aus dem System

$$1 - 2sn^2\left[\frac{(p+1)\mathcal{K}_2 + r_2}{n};\, k_2\right] = \alpha, \quad a = \alpha - \frac{1-\alpha^2}{2sn^2(r_2 + i\mathcal{K}_2';\, k_2) + \alpha - 1}$$

zu bestimmen und dasjenige unter den Polynomen

$$Q_n(x), \ Q_n(x, p;\, k_1), \ Q_n(x, p+1;\, k_2)$$

zu nehmen, welches in $\mathcal{E}$ am wenigsten von $\frac{1}{x-a}$ abweicht.

Für $n \to \infty$ bestehen die Gleichungen

$$(69) \qquad k_1 - \varkappa = 0\left(\frac{\sigma}{n}\right), \quad k_2 - \varkappa = 0\left(\frac{K+\sigma}{n}\right).$$

Zusatz I. Bezeichnet $P_{n+1}(x, a)$ das Polynom $(n+1)$-ten Grades

$$P_{n+1}(x, a) = 1 - (x-a)\, Q_n(x, a),$$

so gilt für alle komplexen und der Ungleichung

$$\alpha < x < \beta$$

genügenden reellen x gleichmässig in jedem abgeschlossenen Bereiche die asymptotische Gleichung

$$(70) \quad P_{n+1}(x, a) \sim (-1)^p \frac{\theta(r+\sigma)}{\theta(r-\sigma)} \frac{\theta^2(r+\rho)}{H^2(2r)} \left[\frac{\theta(r-\rho)}{\theta(r+\rho)}\right]^{n+1} \frac{\theta^2(u+r)}{H^2(u+\rho)} \frac{H(u-\sigma)}{H(u+\sigma)} \left[\frac{H(u+\rho)}{H(u-\rho)}\right]^{n+1}$$

Beweis folgt aus (10), (11) und der Darstellung der Funktion $y(x)$, falls $Q_n(x, a) = Q_n(x)$; in anderen Fällen müssen noch die Beziehungen (69) beachtet werden.

3°. Bis jetzt haben wir vorausgesetzt, dass die Grösse a im Intervalle (α, β) liege. Ist diese Voraussetzung nicht erfüllt und also

$$\text{(i)} \qquad a^2 > 1,$$

so müssen anstatt $y(x)$ und $y_n(x, a; m, k)$ andere, aber nach ähnlichen Gesetze gebildete Funktionen

$$z(x),\ z_n(x, a; m, k)$$

eingeführt werden.

Da die Konstruktionsregel für die zugeordneten Funktionen aus obigem klar ist, so genügt es nur die Funktion $z(x)$ zu definieren.

Dazu setzen wir

(71) $$a = \alpha + \frac{1-\alpha^2}{2sn^2 r + \alpha - 1},$$

wo wegen (i):

$$-K < r < 0,$$

und bestimmen die Grösse $\sigma\,(-K < \sigma \leqslant 0)$ und die naturale Zahl p aus

(72) $$-n\rho - r = pK - \sigma.$$

Dann hat $z(x)$ die Gestalt:

(73$_1$) $$z(x) = \frac{\mu_n}{2}\left\{\left[\frac{H(\rho+u)}{H(\rho-u)}\right]^n \frac{H(r+u)}{H(r-u)}\frac{\theta(\sigma-u)}{\theta(\sigma+u)} + \left[\frac{H(\rho-u)}{H(\rho+u)}\right]^n \frac{H(r-u)}{H(r+u)}\frac{\theta(\sigma+u)}{\theta(\sigma-u)}\right\} = \frac{1}{x-a} + \frac{C}{x-c} - S_n(x),$$

(73$_2$) $$\mu_n = \frac{1}{a^2-1}\,\frac{\theta^2(0)\,\theta_1^2(0)}{\theta^2(r)\,\theta_1^2(r)}\,\frac{\theta(r+\sigma)}{\theta(r-\sigma)}\left[\frac{H(\rho-r)}{H(\rho+r)}\right]^n,$$

$$c = \alpha + \frac{1-\alpha^2}{2sn^2(\sigma+iK')+\alpha-1},$$

$$C = (-1)^{n-p-1}\mu_n\,\frac{2(c-\alpha)(\beta-c)}{\beta-\alpha}\,\frac{\theta(r-\sigma)}{\theta(r+\sigma)}\,\frac{\theta^2(\sigma)\,\theta_1^2(\sigma)}{\theta^2(0)\,\theta_1^2(0)}\left[\frac{\theta(\rho-\sigma)}{\theta(\rho+\sigma)}\right]^n,$$

wo $S_n(x)$ bezeichnet ein Polynom vom Grade n; für $-K < \sigma < 0$ ist $\alpha < c < \beta$, $C \neq 0$, während für $\sigma = 0$ ist auch $C = 0$.

Satz XIV. Genügt die Grösse a der Ungleichung

$$a^2 > 1,$$

so besteht die asymptotische Formel

(74) $$E_n\left[\frac{1}{x-a}\right] \sim \frac{1}{a^2-1}\,\frac{\theta^2(0)\,\theta_1^2(0)}{\theta^2(r)\,\theta_1^2(r)}\,\frac{\theta(r+\sigma)}{\theta(r-\sigma)}\left|\frac{H(\rho-r)}{H(\rho+r)}\right|^n,$$

wo $\varkappa$, ρ, r und σ aus (1), (2), (71), (72) zu bestimmen sind.

Ist für irgend ein n die Grösse σ gleich Null, so ist für dieses n genau:

$$\max_{x \lessgtr \mathcal{E}} \left| \frac{1}{x-a} - S_n(x) \right| = E_n\left[\frac{1}{x-a}\right] = \frac{1}{a^2-1} \frac{\theta^2(0)\,\theta_1^2(0)}{\theta^2(r)\,\theta_1^2(r)} \left| \frac{H(\rho-r)}{H(\rho+r)} \right|^n.$$

Vermöge der Funktion $z(x)$ und ihrer zugeordneten Funktionen $z_n(x, a; m, k)$ kann man für jedes n ein Polynom n-ten Grades

$$S_n(x, a)$$

konstruieren, welches die Eigenschaft hat, dass

$$\max_{x \lessgtr \mathcal{E}} \left| \frac{1}{x-a} - S_n(x, a) \right| \sim E_n\left[\frac{1}{x-a}\right].$$

Zusatz II. Bezeichnet $R_{n+1}(x, a)$ das Polynom $(n+1)$-ten Grades

$$R_{n+1}(x, a) = 1 - (x-a) S_n(x, a),$$

so gilt für alle dem Intervalle $<-1, 1>$ nicht angehörenden x gleichmässig in jedem abgeschlossenen Bereiche die asymptotische Gleichung

$$(75)\quad R_{n+1}(x, a) \sim \frac{H^2(r+\rho)}{H^2(2r)} \frac{\theta(r+\sigma)}{\theta(r-\sigma)} \left[\frac{H(\rho-r)}{H(\rho+r)}\right]^{n+1} \frac{H^2(u+r)}{H^2(u+\rho)} \frac{\theta(u-\sigma)}{\theta(u+\sigma)} \left[\frac{H(\rho+u)}{H(\rho-u)}\right]^{n+1}.$$

§ 26. **Asymptotische Auswertung eines bestimmten Integrals.** Ehe wir zur Erweiterung der im vorigen Paragraphen gefundenen Sätze übergehen, müssen wir einen Hilfssatz über asymptotische Berechnung eines Integrals vorausschicken. Dieser Hilfssatz gehört demjenigen Ideenkreise, welcher mit den Namen von Laplace, Darboux, Stieltjes und anderen verbunden ist.[19]

Hilfssatz. Die Funktionen $F(z)$, $h(z)$ und $\varphi(z) = e^{h(z)}$ seien im unendlichen Intervalle $z \geqslant a$ $(a > 0)$ definiert und den folgenden Bedingungen unterworfen:

1, $\dfrac{\log^m\left(\frac{z}{a}-1\right)}{\left(\frac{z}{a}-1\right)^s} F(z)\,\varphi^n(z)$, wo die reelle Zahl s kleiner als Eins ist und m eine naturale Zahl bedeutet, sei absolut integrabel in a, ∞ für alle genügend grosse n;

2, $F(z)$ sei stetig für $z = a$, $F(a) \neq 0$;

3, der Wert der Funktion $h(z)$ sei an der Stelle $z = a$ grösser, als ihre obere Grenze in jedem rechts von $z = a$ gelegenen abgeschlossenen Intervalle; ferner gebe es ein solches $a' > a$, dass für

$$a < z < a'$$

$h''(z)$ existiert und beschränkt ist; endlich sei $h'(a) < 0$.

[19] Vgl. Polya-Szegö, Aufgaben und Lehrsätze, Bd. I, S. 81.

Dann gilt für $n \to \infty$ die folgende asymptotische Formel:

$$\int_a^{\infty} \frac{\log^m\left(\frac{z}{a}-1\right)}{\left(\frac{z}{a}-1\right)^s} F(z)\,\varphi^n(z)\,dz \sim (-1)^m aF(a)\,\varphi^n(a)\left[-\frac{\varphi(a)}{a\varphi'(a)}\right]^{1-s} \Gamma(1-s)\,\frac{\log^m n}{n^{1-s}}. \tag{76}$$

Beweis. Man bemerke zunächst, dass

$$\int_{a'}^{\infty} \frac{\log^m\left(\frac{z}{a}-1\right)}{\left(\frac{z}{a}-1\right)^s} F(z)\,\varphi^n(z)\,dz = \varphi^n(a)\cdot 0(\delta^n),$$

wo $\delta\,(0 < \delta < 1)$ von n unabhängig ist.

Bezeichnet ferner k eine positive Konstante und ist $\varepsilon = n^{-\frac{2}{3}}k$, so besteht die Ungleichung

$$\left|\int_{a+\varepsilon}^{a'} \frac{\log^m\left(\frac{z}{a}-1\right)}{\left(\frac{z}{a}-1\right)^s} F(z)\,\varphi^n(z)\,dz\right| < M_1\,[\varphi(a+\varepsilon)]^n =$$

$$= M_1\,[\varphi^n(a)\,e^{n\varepsilon h'(a)}\,e^{n\frac{\varepsilon^2}{2}h''(\xi)} = M\varphi^n(a)\,e^{kh'(a)n^{1/3}}.$$

Endlich ist

$$\int_a^{a+\varepsilon} \frac{\log^m\left(\frac{z}{a}-1\right)}{\left(\frac{z}{a}-1\right)^s} F(z)\,\varphi^n(z)\,dz =$$

$$= F(\zeta)\,e^{\frac{n}{2}h''(\zeta_1)(\zeta-a)^2}\,\varphi^n(a)\int_a^{a+\varepsilon} \frac{\log^m\left(\frac{z}{a}-1\right)}{\left(\frac{z}{a}-1\right)^s}\,e^{nh'(a)(z-a)}\,dz =$$

$$= F(a)\,\varphi^n(a)\,(1+\eta_n)\int_0^{\infty} \frac{\log^m\frac{t}{n}}{\left(\frac{t}{n}\right)^s}\,e^{ah'(a)t}\,\frac{a\,dt}{n},$$

wo

$$a < \zeta < a+\varepsilon,\quad a < \zeta_1 < a+\varepsilon;\quad \eta_n \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Beachtet man, dass

$$\int_0^\infty \frac{\log^m \frac{t}{n}}{\left(\frac{t}{n}\right)^s} e^{ah'(a)t} \frac{adt}{n} = (-1)^m \frac{d^m}{ds^m} \int_0^\infty e^{ah'(a)t} \left(\frac{t}{n}\right)^{-s} \frac{adt}{n} =$$

$$= a(-1)^m \frac{d^m}{ds^m} \left\{ n^{s-1} \left[-\frac{1}{ah'(a)} \right]^{1-s} \Gamma(1-s) \right\} \sim$$

$$\sim (-1)^m a\Gamma(1-s) \left[-\frac{\varphi(a)}{a\varphi'(a)} \right]^{1-s} \frac{\log^m n}{n^{1-s}},$$

und vereinigt man die oben erhaltenen Abschätzungen, so ergibt sich die gewünschte Formel (76).

§ 27. Über die beste in $\mathcal{E}$ Annäherung der Funktion $\frac{\log^m (a-x)}{(a-x)^s}$, falls $a > 1$. Wir nehmen die Funktion

$$\text{(a)} \qquad \frac{\log^m (a-x)}{(a-x)^s}$$

und fragen nach dem asymptotischen (für $n \to \infty$) Verhalten der Grösse

$$E_n\left[\frac{\log^m (a-x)}{(a-x)^s}\right],$$

wobei m eine naturale und s eine beliebige reelle Zahl bedeuten.

Im Falle der Annäherung auf einer Strecke wurde diese Aufgabe im Jahre 1912 von S. Bernstein aufgestellt und gelöst.[20] Unsere Erweiterung (auf zwei Intervalle) des Satzes von S. Bernstein lautet folgendermassen.

Satz XV. Ist k eine ganze positive Zahl oder Null, so besteht (für $n \to \infty$) die asymptotische Gleichung

$$\text{(77)} \quad E_n[(a-x)^k \log^m (a-x)] \sim m.k! \frac{\log^{m-1} n}{n^{1+k}} \left[\frac{\sqrt{(a^2-1)(a-\alpha)(a-\beta)}}{a-\gamma} \right]^{1+k} E_n\left[\frac{1}{a-x}\right];$$

bedeutet ferner s eine beliebige reelle Zahl, welche nicht einer der Zahlen $0, -1, -2, \ldots$ gleich ist, so gilt für $n \to \infty$ die Beziehung

$$\text{(78)} \quad E_n\left[\frac{\log^m (a-x)}{(a-x)^s}\right] \sim \frac{\log^m n}{\Gamma(s)\, n^{1-s}} \left[\frac{\sqrt{(a^2-1)(a-\alpha)(a-\beta)}}{a-\gamma} \right]^{1-s} E_n\left[\frac{1}{a-x}\right].$$

Dabei bezeichnet γ die vermöge (12) definierte Grösse.

20 S. Bernstein, Sur la valeur asymptotique de la meilleure approximation des fonctions analytiques admettant des singularités données (Bulletins de l'Académie de Belgique, 1913, pp. 76—90).

Beweis. Im § 25 haben wir gezeigt, wie für jedes n ein Polynom n-ten Grades $S_n(x, a)$ konstruiert werden kann, für welches

$$\max_{x \prec \mathcal{E}} \left| \frac{1}{x-a} - S_n(x, a) \right| \sim E_n\left[\frac{1}{x-a}\right].$$

Wir haben gesehen, dass für alle komplexen und der Ungleichung $x^2 > 1$ genügenden reellen x die asymptotische Gleichung (75) erfüllt ist, wo

$$R_{n+1}(x, a) = 1 - (x-a) S_n(x, a).$$

Vermöge dieser Funktion $R_{n+1}(x, a)$ wollen wir jetzt das Integral

$$\text{(b)} \qquad I_s^{(m)} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{\log^m (a-z)}{(a-z)^s} \frac{R_{n+1}(x, a)}{R_{n+1}(z, a)} \frac{dz}{z-x}$$

bilden, wobei C den aus Fig. 7 ersichtlichen den Strahl a, ∞ begleitenden Weg bezeichnet und $x \prec \mathcal{E}$ stets vorausgesetzt ist.

Fig. 7.

Nach dem Residuensatze ist

$$\text{(c)} \qquad I_s^{(m)} = \frac{\log^m (a-x)}{(a-x)^s} - P_n(x),$$

wo $P_n(x)$ ein reelles Polynom vom Grade n ist, welches, wie wir sehen werden, asymptotisch die beste in $\mathcal{E}$ Annäherung der betrachteten Funktion (a) geben wird. Nun wollen wir das Integral (b) asymptotisch berechnen, und zwar zunächst im Falle $s < 1$. Eine triviale Deformation des Integrationsweges C liefert für $I_s^{(m)}$ den Ausdruck:

$$\text{(d)} \qquad \begin{aligned} I_s^{(m)} = {} & \frac{e^{\pi i s}}{2\pi i} \int\limits_a^\infty \frac{[\log(z-a) - \pi i]^m}{(z-a)^s} \frac{R_{n+1}(x, a)}{R_{n+1}(z, a)} \frac{dz}{z-x} - \\ & - \frac{e^{-\pi i s}}{2\pi i} \int\limits_a^\infty \frac{[\log(z-a) + \pi i]^m}{(z-a)^s} \frac{R_{n+1}(x, a)}{R_{n+1}(z, a)} \frac{dz}{z-x}, \end{aligned}$$

wobei, wie gesagt, $s < 1$.

Ist s eine negative ganze Zahl oder Null: $s = -k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, so folgt aus (d) nach dem Hilfssatze von § 26, dass für $n \to \infty$

$$I_{-k}^{(m)} \sim \pm m \int_a^\infty \frac{\log^{m-1}(z-a)}{(z-a)^{-k}} \frac{R_{n+1}(x, a)}{R_{n+1}(z, a)} \frac{dz}{z-x}$$

oder

(e) $$I_{-k}^{(m)} \sim \pm m a^k \int_a^\infty \frac{\log^{m-1}\left(\frac{z}{a}-1\right)}{\left(\frac{z}{a}-1\right)^{-k}} \frac{R_{n+1}(x, a)}{R_{n+1}(z, a)} \frac{dz}{z-a}.$$

Ähnlich ist im Falle $s \neq -k$ $(s < 1)$ nach (d):

$$I_s^{(m)} \sim \frac{\sin \pi s}{\pi} \int_a^\infty \frac{\log^m(z-a)}{(z-a)^s} \frac{R_{n+1}(x, a)}{R_{n+1}(z, a)} \frac{dz}{z-x}$$

oder

(f) $$I_s^{(m)} \sim \frac{\sin \pi s}{\pi} \frac{1}{a^s} \int_a^\infty \frac{\log^m\left(\frac{z}{a}-1\right)}{\left(\frac{z}{a}-1\right)^s} \frac{R_{n+1}(x, a)}{R_{n+1}(z, a)} \frac{dz}{z-x}.$$

Setzt man jetzt

$$\varphi(z) = \frac{H(r+\rho)}{H(r-\rho)} \frac{H(u-\rho)}{H(u+\rho)}, \quad z = \frac{sn^2 u \cdot cn^2 \rho + cn^2 u \cdot sn^2 \rho}{sn^2 u - sn^2 \rho},$$

so ist nach (75)

(g) $$\frac{1}{R_{n+1}(z, a)} \frac{1}{z-x} \sim F(z) \varphi^{n+1}(z),$$

wo

$$F(z) = \frac{H^2(2r)}{H^2(r+\rho)} \frac{\theta(r-\sigma)}{\theta(r+\sigma)} \frac{H^2(u+\rho)}{H^2(u+r)} \frac{\theta(u+\sigma)}{\theta(u-\sigma)} \frac{1}{z-x},$$

so dass

(h) $$F(a) = \frac{1}{a-x}$$

Beachtet man noch (9) und (13), so ergibt sich, dass

$$\varphi'(z) = \varphi(z) \left\{\frac{H'(u-\rho)}{H(u-\rho)} - \frac{H'(u+\rho)}{H(u+\rho)}\right\} \frac{du}{dz} = -\varphi(z) \frac{z-\gamma}{\sqrt{(z^2-1)(z-\alpha)(z-\beta)}}$$

und also

$$\varphi'(a) = -\frac{a-\gamma}{\sqrt{(a^2-1)(a-\alpha)(a-\beta)}}.$$

Wendet man jetzt den Hilfssatz von § 26 an, so entstehen die Formeln:

$$\text{(i)}\qquad I_{-k}^{(m)} \sim \pm\, m.\, k!\, \frac{\log^{m-1} n}{n^{1+k}} \left[\frac{\sqrt{(a^2-1)(a-\alpha)(a-\beta)}}{a-\gamma} \right]^{1+k} \frac{R_{n+1}(x, a)}{a-x},$$

$$\text{(k)}\qquad I_s^{(m)} \sim \pm \frac{\sin \pi s}{\pi} \Gamma(1-s) \frac{\log^m n}{n^{1-s}} \left[\frac{\sqrt{(a^2-1)(a-\alpha)(a-\beta)}}{a-\gamma} \right]^{1-s} \frac{R_{n+1}(x, a)}{a-x}.$$

Nun ist aber

$$\frac{R_{n+1}(x, a)}{a-x} = S_n(x, a) - \frac{1}{x-a}, \qquad \frac{\sin \pi s}{\pi} \Gamma(1-s) = \frac{1}{\Gamma(s)}.$$

Beachtet man daher das $S_n(x, a)$ in $\mathcal{E}$ asymptotisch am wenigsten von $\frac{1}{x-a}$ abweicht, so ergibt sich aus (c) und (i), (k), dass das Polynom $P_n(x)$ in bezug auf (a) diejenige Oszillationseigenschaft besitzt, welche nach dem Satze I für die beste asymptotische Annäherung als charakteristisch erkannt wurde.

Damit ist unser Satz für $s < 1$ bewiesen.

Es sei jetzt $s > 1$. Nach (b) und (g) ist:

$$I_s^{(m)} \sim \frac{1}{2\pi i} \frac{R_{n+1}(x, a)}{a-x} \int_C \frac{\log^m (a, z)}{(a-z)^s} F_1(z) \varphi^{n+1}(z)\, dz,$$

wo

$$F_1(z) = F(z)(a-x),$$

so dass nach (h)

$$F_1(a) = 1.$$

Nach einer partiellen Integration ergibt sich, dass

$$\int_C \frac{1}{(a-z)^{s+1}} F_1(z) \varphi^{n+1}(z)\, dz = -\frac{1}{s} \int_C \frac{1}{(a-z)^s} \frac{d}{dz} \{F_1(z) \varphi^{n+1}(z)\}\, dz \sim$$

$$\sim \frac{n}{s} \int_C \frac{1}{(a-z)^s} F_1(z) \varphi^{n+1}(z) \frac{(z-\gamma)\, dz}{\sqrt{(z^2-1)(z-\alpha)(z-\beta)}} =$$

$$= \frac{n}{s} \left[\frac{\sqrt{(a^2-1)(a-\alpha)(a-\beta)}}{a-\gamma} \right]^{-1} \int_C \frac{1}{(a-z)^s} F_2(z) \varphi^{n+1}(z)\, dz,$$

wo wieder

$$F_2(a) = 1.$$

Eine wiederholte Anvendung dieser Überlegung lehrt, dass

$$I_{s+l}^{(0)} \backsim \frac{n^l}{(s+l-1)(s+l-2)\ldots s}\left[\frac{\sqrt{(a^2-1)(a-\alpha)(a-\beta)}}{a-\gamma}\right]^{-l} I_s^{(0)},$$

wobei l als ganz und positiv, während s kleiner als Eins vorausgesetzt sind. Wegen

$$(s+l-1)(s+l-2)\ldots s\Gamma(s)=\Gamma(s+l)$$

ist daher die Gleichung (78) im Falle $m=0$ für alle $s \geqslant 1$ ebenso, wie für $s<1$, richtig.

Eine Differentiation nach dem Parameter s zeigt ferner, dass

$$I_s^{(m+1)} = -\frac{d}{ds} I_s^{(m)}.$$

Daraus folgt die Richtigkeit von (78) auch für alle naturalen m.

Damit ist unser Satzt vollständig bewiesen.

§ 28. Über die beste in $\mathcal{E}$ Annäherung der Funktion $\frac{1}{(a-x)^m}$, falls $\alpha<a<\beta$. Es sei m eine naturale Zahl und a eine reelle der Ungleichung

$$\alpha<a<\beta$$

genügende Grösse. Wir nehmen die Funktion

$$\text{(a)} \qquad \frac{1}{(a-x)^m}$$

und wollen das asymptotische (für $n \to \infty$) Verhalten der Grösse $E_n\left[\frac{1}{(a-x)^m}\right]$ untersuchen.

Im § 25 haben wir gezeigt, wie für jedes n ein Polynom n-ten Grades $Q_n(x, a)$ konstruiert werden kann, welches die Eigenschaft besitzt, dass

$$\max_{x \lessgtr \mathcal{E}} \left|\frac{1}{x-a} - Q_n(x, a)\right| \backsim E_n'\left[\frac{1}{x-a}\right].$$

Wir haben gesehen, dass für alle komplexen und der Ungleichung $\alpha<x<\beta$ genügenden reellen x die asymptotische Beziehung (70) erfüllt ist, wo

$$P_{n+1}(x, a) = 1-(x-a)\,Q_n(x, a).$$

Vermöge dieser Funktion $P_{n+1}(x, a)$ wollen wir jetzt das Integral

(b) $$J_m = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{(a-z)^m}\frac{P_{n+1}(x, a)}{P_{n+1}(x, a)}\frac{dz}{z-x}$$

bilden, wo C eine aus Fig. 8 ersichtliche den Punkt a umschliessende Kurve bezeichnet und $x \lessgtr \mathcal{E}$.

Nach dem Residuensatze ist

(c) $$J_m = \frac{1}{(a-x)^m} - \Pi_n(x),$$

-1 α C ·a β 1

Fig. 8.

wo $\Pi_n(x)$ ein reelles Polynom von Grade n bezeichnet, welches, wie wir sehen werden, asymptotisch die beste in $\mathcal{E}$ Annäherung der Funktion (a) liefern wird.

Nun ist offenbar

(d) $$J_m = (-1)^{m-1}\frac{1}{(m-1)!}P_{n+1}(x, a)\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[\frac{1}{P_{n+1}(z, a)(z-x)}\right]_{z=a};$$

daher sind wir zur asymptotischen (für $n \to \infty$) Auswertung der Grösse

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[\frac{1}{P_{n+1}(z, a)(z-x)}\right]_{z=a}$$

gekommen.

Dazu müssen wir die Darstellung (70) nehmen und die Gleichungen

$$\varphi(z) = \frac{H(u-\rho)}{H(u+\rho)}, \quad z = \frac{sn^2 u \cdot cn^2 \rho + cn^2 u \cdot sn^2 \rho}{sn^2 u - sn^2 \rho},$$

$$\varphi'(z) = -\varphi(z)\frac{z-\gamma}{\sqrt{(1-z^2)(z-\alpha)(\beta-z)}}$$

benutzen.

Es sei zunächst $a \neq \gamma$. In diesem Falle folgt aus (70) und aus angegebenen Gleichungen, dass

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[\frac{1}{P_{n+1}(z, a)(z-x)}\right]_{z=a} \sim \frac{n^{m-1}}{a-x}\left[\frac{\gamma-a}{\sqrt{(1-a^2)(a-\alpha)(\beta-a)}}\right]^{m-1},$$

und also nach (b), (c) und (g) ist für $a \neq \gamma$:

$$\text{(e)}\quad \frac{1}{(a-x)^m}-\Pi_n(x) \sim \frac{n^{m-1}}{(m-1)!}\left[\frac{a-\gamma}{\sqrt{(1-a^2)(a-\alpha)(\beta-a)}}\right]^{m-1}\left\{Q_n(x,a)-\frac{1}{x-a}\right\}.$$

Es sei jetzt $a=\gamma$. Hier müssen die beiden Möglichkeiten:

$$m=2k+1,\ m=2k$$

besonders behandelt werden. Wir wollen nur die erste Möglichkeit untersuchen; es sei also $m=2k+1$.

In diesem Falle ergibt sich aus

$$\frac{d^{2k}}{dz^{2k}}\left[\frac{1}{P_{n+1}(z,\gamma)(z-x)}\right]_{z=\gamma} \sim (-1)^k k!\, n^k \frac{1}{[\sqrt{(1-\gamma^2)(\gamma-\alpha)(\beta-\gamma)}]^k}\frac{1}{\gamma-x},$$

dass

$$\text{(f)}\quad \frac{1}{(\gamma-x)^{2k+1}}-\Pi_n(x) \sim \frac{k!\, n^k}{(2k)!}\frac{(-1)^{k-1}}{[\sqrt{(1-\gamma^2)(\gamma-\alpha)(\beta-\gamma)}]^k}\left\{\frac{1}{x-\gamma}-Q_n(x,\gamma)\right\}.$$

Die Beziehungen (e) und (f) führen zum folgenden Satze.

Satz XVI. Bedeutet m eine naturale Zahl und liegt die reelle Grösse a zwischen α und β, so gilt die asymptotische Gleichung

$$\text{(79)}\quad E_n\left[\frac{1}{(a-x)^m}\right] \backsim \frac{n^{m-1}}{(m-1)!}\left|\frac{a-\gamma}{\sqrt{(1-a^2)(a-\alpha)(\beta-a)}}\right|^{m-1} E_n\left[\frac{1}{a-x}\right],$$

falls $a \neq \gamma$.

Dagegen ist im Falle $a=\gamma$:

$$\text{(80)}\quad E_n\left[\frac{1}{(\gamma-x)^{2k+1}}\right] \backsim \frac{k!\, n^k}{(2k)!}\frac{1}{[\sqrt{(1-\gamma^2)(\gamma-\alpha)(\beta-\gamma)}]^k} E_n\left[\frac{1}{\gamma-x}\right],$$

und eine ähnliche Verminderung der Ordnung des Quotienten

$$\frac{E_n\left[\frac{1}{(\gamma-x)^m}\right]}{E_n\left[\frac{1}{\gamma-x}\right]}$$

gilt auch für gerade m.

VIII Kapitel

Über parametrische Darstellung des Tschebycheffschen in bezug auf $\mathcal{E}$ Polynoms $t_n(x)$ für jedes endliche n.

§ 29. **Beweis einiger Hilfssätze.** Im vierten Kapitel haben wir uns beschäftigt mit dem asymptotischen (falls $n \to \infty$) Verhalten der Tschebyscheffschen in bezug auf $\mathcal{E}$ Polynome $t_n(x)$. In diesem Kapitel wollen wir einige Sätze beweisen über die parametrische Darstellung[21] des Polynoms $t_n(x)$ für jedes endliche n. Um die Abhängigkeit des Polynoms $t_n(x)$ von der Punktmenge $\mathcal{E}$ zu betonen, werden wir in diesem Kapitel neben den Bezeichnungen $t_n(x)$ und $m_n = \max\limits_{x \lessgtr \mathcal{E}} |t_n(x)|$ oft die vollständigeren Bezeichnungen $t_n(x;\, \alpha, \beta)$ und $m_n(\alpha, \beta)$ gebrauchen.

Hilfssatz A. Liegen die beiden Grössen α und β in einem und demselben der n Intervalle

$$(81) \qquad < \cos\frac{m+1}{n}\pi, \quad \cos\frac{m}{n}\pi > \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

so besteht die Gleichung

$$t_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos n \arccos x,$$

so dass

$$\max_{\alpha \leqslant x \leqslant \beta} |t_n(x)| \leqslant \max_{x \lessgtr \mathcal{E}} |t_n(x)| = m_n = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Hilfssatz B. Besteht die Ungleichung

$$\max_{\alpha \leqslant x \leqslant \beta} |t_n(x)| \leqslant \max_{x \lessgtr \mathcal{E}} |t_n(x)|,$$

so ist

$$t_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos n \arccos x$$

und die beiden Grössen α und β liegen in einem und demselben der n Intervalle (81).

Beweis dieser Hilfssätze ist klar.

21 Vgl. N. Achyeser, Über einige Funktionen, die in gegebenen Intervallen am wenigsten von Null abweichen (Bull. de la Soc. Physico-Mathém. de Kazan, 1928 (3), t. III, f. 2, pp. 1—69).

Hilfssatz C. Das Tschebyscheffsche in bezug auf $\mathcal{E}$ Polynom $t_n(x)$ hat im offenen Intervalle (α, β) höchstens zwei Extrema.

Beweis. Hätte das Polynom $t_n(x)$ in (α, β) k Extrema, so könnte die Ableitung von $t_n(x)$ in den Intervallen $(-1, \alpha)$, $(\beta, 1)$ höchstens $n-1-k$ Nullstellen haben; demnach wäre die Gesamtanzahl der Abweichungsstellen von $t_n(x)$ in $\mathcal{E}$ nicht grösser als

$$(n-1-k)+4=n+3-k$$

(sogar in dem günstigsten Falle, wo alle vier Punkte -1, α, β, 1 Abweichungsstellen sind), diese Zahl ist aber für $k \geqslant 3$ kleiner, als $n+1$, was für das Tschebyscheffsche Polynom unmöglich ist.

Folgerung 1. Liegen die Grössen α, β nicht in einem und demselben der n Intervalle (81), so muss eine der zwei folgenden Möglichkeiten statt finden:

1, in dem Intervalle (α, β) hat $t_n(x)$ nur ein Extremum in irgend einem Punkte δ, wobei $|t_n(\delta)| > m_n$;

2, in dem Intervalle (α, β) hat $t_n(x)$ zwei Extrema: für $x=\delta_1$ und $x=\delta_2$, wobei

$$|t_n(\delta_1)| > m_n, \ |t_n(\delta_2)| > m_n, \ t_n(\delta_1) \cdot t_n(\delta_2) < 0, \ t_n(\alpha) = -t_n(\beta) = \pm m_n.$$

Folgerung 2. Die Zahlen -1, 1 sind unter allen Umständen Abweichungsstellen von $t_n(x)$, wobei

$$t_n(-1)=(-1)^n m_n, \ t_n(1)=m_n.$$

Hilfssatz D. Entspricht das Tschebyscheffsche in bezug auf $\mathcal{E}$ Polynom $t_n(x)$ der ersten Möglichkeit der Folgerung 1, so ist

$$t_n(x)=T_n(x;\, m,\, k),$$

wo $T_n(x;\, m,\, k)$ das im § 8 definierte Polynom bedeutet, m der Ungleichung

$$1 \leqslant m \leqslant n-1$$

genügt und k eine der zwei Gleichungen

$$\alpha = 1-2sn^2\left(\frac{m}{n}\mathcal{K}; k\right), \quad \beta = 2sn^2\left(\frac{n-m}{n}\mathcal{K}; k\right)-1$$

befriedigt.

Beweis. Der Bestimmtheit halber sei vorausgesetzt, dass

$$t_n(\delta) > m_n.$$

Da $|t_n(\alpha)| \leqslant m_n$, $|t_n(\beta)| \leqslant m_n$, so existieren zwei Zahlen a, b, welche der Ungleichung

$$\alpha \leqslant a < b \leqslant \beta$$

genügen und für welche

$$t_n(a) = t_n(b) = m_n.$$

Wenn wir die Zahlenmenge

$$<-1, a>, \ <b, 1>$$

durch E bezeichnen und wenn wir beachten, dass $t_n(x)$ in (α, β) nur ein Extremum hat, so ergibt sich, dass

$$\max_{x \lessgtr E} |t_n(x)| = \max_{x \lessgtr \mathcal{E}} |t_n(x)|,$$

und also ist $t_n(x)$ nicht nur in $\mathcal{E}$ sondern auch in E das Tschebyscheffsche Polynom n-ten Grades. Da aber

$$t_n(a) = t_n(b) = m_n,$$

so ist die Gesamtanzahl der Abweichungsstellen von $t_n(x)$ in E gleich $n+2$, und da die Gesamtanzahl der Abweichungsstellen von $t_n(x)$ in $\mathcal{E}$ mindestens $n+1$ ist, so muss mindestens eine der zwei Gleichungen

$$a = \alpha, \ b = \beta$$

statt finden. Nachdem dies gezeigt ist folgt unser Hilfssatz unmittelbar aus dem Satze G von § 9.

Bezeichnungen. Wird der Modul k, von welchen die Funktion

$$T_n(x; m, k)$$

abhängt, bestimmt aus der Gleichung

$$\alpha = 1 - 2sn^2\left(\frac{m}{n}\mathcal{K}; k\right), \tag{82}$$

so werden wir ihn durch $\varkappa_m$ bezeichnen und vermöge der Formel

$$\frac{2(\beta_m - \alpha)}{(1-\alpha)(1+\beta_m)} = \varkappa_m \tag{83}$$

die Zahl β_m bestimmen, welche offenbar eine gewisse Funktion von m und α ist; ferner werden wir durch η_m die kleinste im Intervalle $<\beta_m, 1>$ ge-

legene Wurzel der Gleichung $\frac{d}{dx} T_n(x;\ m,\ \varkappa_m) = 0$ bezeichnen. Ähnlich werden wir den Modul durch $\check{\varkappa}_m$ bezeichnen, falls er aus

(84) $$\beta = 2 sn^2 \left(\frac{n-m}{n} \mathcal{K};\ k\right) - 1$$

bestimmt wird; anstatt (83) möge hier die Gleichung

(85) $$\frac{2(\beta - \check{\alpha}_m)}{(1-\check{\alpha}_m)(1+\beta)} = \check{\varkappa}_m$$

eingeführt werden und es bezeichne $\check{\xi}_m$ die grösste in dem Intervalle

$$< -1,\ \check{\alpha}_m >$$

gelegene Wurzel der Gleichung

$$\frac{d}{dx} T_n(x;\ m,\ \check{\varkappa}_m) = 0.$$

Dabei wird still vorausgesetzt, dass $\varkappa_m$ und $\check{\varkappa}_m$ positive echte Brüche sind; wenn wir, z. B., die Gleichung (82) nehmen, so folgt daraus, dass m nicht grösser als μ sein kann, falls

$$\cos \frac{\mu}{n} \pi \leqslant \alpha.$$

Hilfssatz E. Sind die Zahlen $\varkappa_p, \varkappa_{p-1}, \ldots \varkappa_2, \varkappa_1$ sämtlich positiv und kleiner als Eins, so bestehen die Ungleichungen

(86) $$\beta_p < \eta_p < \beta_{p-1} < \eta_{p-1} < \beta_{p-2} < \ldots < \beta_2 < \eta_2 < \beta_1 < 1.$$

Beweis. Aus der Definition der Grösse η_m folgt, dass $\beta_m < \eta_m$. Zum Beweise der Ungleichungen (86) genügt es also zu zeigen, dass

(a) $$\eta_m < \beta_{m-1},$$

falls m irgend eine der Ungleichung $2 \leqslant m \leqslant p$ genügende ganze Zahl bedeutet.

Nun folgt aus dem Hilfssatze I von § 7 und aus den die Grössen $\varkappa_m$ und $\varkappa_{m-1}$ bestimmenden Gleichungen

$$\alpha = 1 - 2sn^2\left(\frac{m}{n} K_m;\ \varkappa_m\right), \quad \alpha = 1 - 2sn^2\left(\frac{m-1}{n} K_{m-1};\ \varkappa_{m-1}\right),$$

dass $\varkappa_{m-1} > \varkappa_m$; nach (83) ist daher

(b) $$\beta_{m-1} > \beta_m.$$

Wir wollen die Ungleichungen (a) indirekt beweisen; wir setzen also voraus, dass

(c) $$\beta_{m-1} \leqslant \eta_m.$$

Wegen (b) haben wir daher

(d) $$\beta_m < \beta_{m-1} \leqslant \eta_m.$$

Es bezeichne $\mathcal{E}_{m-1}$ die Punktmenge

$$<-1, \alpha>, \ <\beta_{m-1}, 1>.$$

In bezug auf $\mathcal{E}_{m-1}$ ist $T_n(x; m-1, \varkappa_{m-1})$ das Tschebyscheffsche Polynom n-ten Grades; aber wegen (d) und des Satzes F von § 8 ist auch das von $T_n(x; m-1, \varkappa_{m-1})$ verschiedene Polynom $T_n(x; m, \varkappa_m)$ ebenfalls das Tschebyscheffsche Polynom n-ten Grades für $\mathcal{E}_{m-1}$.

Wegen der Einzigkeit des Tschebyscheffschen Polynoms ist also die von uns gemachte Voraussetzung (c) unmöglich; damit ist (a) und der ganze Hilfssatz $\mathcal{E}$ bewiesen.

Hilfssatz F. Sind die Zahlen $\breve{\varkappa}_{n-1}, \breve{\varkappa}_{n-2}, \ldots, \breve{\varkappa}_p$ sämtlich positiv und kleiner als Eins, so bestehen die Ungleichungen

(87) $$-1 < \breve{\alpha}_{n-1} < \breve{\xi}_{n-2} < \breve{\alpha}_{n-2} < \ldots < \breve{\xi}_p < \breve{\alpha}_p.$$

Beweis verläuft ebenso, wie im vorigen Hilfssatze.

Definition. Entspricht das Tschebyscheffsche in bezug auf $\mathcal{E}$ Polynom $t_n(x)$ der zweiten Möglichkeit der Folgerung 1, so wollen wir dieses Polynom als das Tschebyscheffsche Polynom zweiter Art bezeichnen und für es die Schreibweise

$$S_n(x; p; \alpha, \beta)$$

gebrauchen, falls das betrachtete Polynom in $<-1, \alpha>$ $n-p$ und in $<\beta, 1>$ $p+1$ Abweichungsstellen hat; die naturale Zahl p genügt hier der Ungleichung $1 \leqslant p \leqslant n-2$.

Für $S_n(x; p; \alpha, \beta)$ gelten folgende Formeln:

$$S_n(\beta; p; \alpha, \beta) = (-1)^p m_n, \quad S_n(\zeta_2; p; \alpha, \beta) = (-1)^p m_n,$$
$$S_n(\zeta_1; p; \alpha, \beta) = (-1)^{p+1} m_n, \quad S_n(\alpha; p; \alpha, \beta) = (-1)^{p+1} m_n,$$

wo ζ_1 und ζ_2 zwei zwischen α und β gelegene und von α, β abhängende Zahlen bedeuten.

§ 30. Hauptsatz über den analytischen Charakter des Polynoms $t_n(x; \alpha, \beta)$. Bei der Bestimmung des analytischen Charakters des Polynoms $t_n(x; \alpha, \beta)$ für angegebene α, β und n wollen wir zunächst ebenso verfahren, wie im Kapitel IV, wo es sich um asymptotische Eigenschaften handelte; nähmlich wir nehmen die Zahl

(1) $$\varkappa^2 = \frac{2(\beta - \alpha)}{(1-\alpha)(1+\beta)}$$

und bestimmen die Grössen ρ, σ und die naturale Zahl p aus den Gleichungen:

(2) $$1 - 2sn^2(\rho; \varkappa) = \alpha,$$

(23) $$-n\rho = pK - \sigma,$$

wo

$$-K < \rho < 0, \quad -K < \sigma \leqslant 0.$$

Den Fall $\sigma = 0$ wollen wir nicht betrachten, da er schon im Kapitel III erledigt war.

Aus

$$\alpha = 1 - 2sn^2\rho < 1 - 2sn^2\frac{p}{n}K < \cos\frac{p\pi}{n},$$

$$\beta = 2sn^2(K+\rho) - 1 > 2sn^2\frac{n-p-1}{n}K - 1 > \cos\frac{(p+1)\pi}{n}$$

folgt, dass (23) nur dann bestehen kann, wenn

(88) $$\alpha < \cos\frac{p\pi}{n}, \quad \beta > \cos\frac{(p+1)\pi}{n}.$$

Unsere Aufgabe besteht im folgenden: wie kann entschieden werden, welche unter den Funktionen

$$\frac{1}{2^{n-1}}\cos n \arccos x,\ T_n(x; s, \varkappa_s),\ T_n(x; s, \varkappa_s),\ S_n(x; s; \alpha, \beta)$$

mit $t_n(x; \alpha, \beta)$ übereinstimmt?

1°. Die Gleichung

$$t_n(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{2^{n-1}}\cos n \arccos x$$

[wegen (23), (88) und des Hilfssatzes B] besteht nur dann, wenn

$$\cos\frac{(p+1)\pi}{n} \leqslant \alpha < \beta \leqslant \frac{\cos p\pi}{n}.$$

Ist diese Ungleichung nicht erfüllt, so muss $t_n(x; \alpha, \beta)$ einen komplizierteren analytischen Charakter haben.

2°. Indem wir zu anderen Möglichkeiten übergehen, stellen wir zunächst die Frage: unter welchen Umständen besteht die Gleichung

$$T_n(x; s, \varkappa_s) = t_n(x; \alpha, \beta)? \tag{89}$$

Diese Gleichung wird, offenbar, dann und nur dann statt finden, wenn die Gleichung

$$\alpha = 1 - 2sn^2\left(\frac{s}{n}K_s; \varkappa_s\right) \tag{a}$$

in bezug auf $\varkappa_s$ eine positive und kleinere als Eins Lösung besitzt und wenn

$$\beta_s \leqslant \beta \leqslant \eta_s < \beta_{s-1}$$

erfüllt wird. Nun wissen wir nach (88), dass

$$\alpha < \cos\frac{p\pi}{n};$$

dies zeigt, dass (a) für $s = p$ sicher eine Lösung $\varkappa_p$ hat, für welche

$$0 < \varkappa_p < 1,$$

und dass

$$\beta_p > \beta.$$

Wegen der Ungleichungen

$$\beta_s < \beta_{s-1} < \beta_{s-2} < \cdots$$

muss daher notwendig die Ungleichung

$$s \geqslant p + 1$$

erfüllt sein. Daher kann die Gleichung (89) sicher dann nicht erfüllt sein, wenn

$$\alpha \geqslant \cos\frac{(p+1)\pi}{n},$$

da in diesem Falle (für $s \geqslant p + 1$) die Gleichung (a) sicher keine unseren Forderungen genügende Lösung in bezug auf $\varkappa_s$ haben kann.

Ist aber

$$\alpha < \cos\frac{(p+1)\pi}{n},$$

so hat (a) für $s = p+1$ eine Lösung $\varkappa_{p+1} (0 < \varkappa_{p+1} < 1)$; und da jetzt

$$\beta_{p+1} < \beta < \beta_p$$

erfüllt wird, so muss, um (89) mit $s = p+1$ bestehe, noch die Ungleichung

(b) $$\beta \leqslant \eta_{p+1}$$

statt finden.

Mit $s > p+1$, ebenso wie mit $s < p+1$, ist (89) unmöglich.

Bemerkung 1. Im Falle $p = 0$ wird die Bedingung (b) unnötig, da hier anstatt (b) schon die von selbst erfüllte Ungleichung $\beta < 1$ genügen wird.

Daher ist im Falle $p = 0$:

$$t_n(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos n \arccos x,$$

falls $\alpha \geqslant \cos\frac{\pi}{n}$, und

$$t_n(x; \alpha, \beta) = T_n(x; 1, \varkappa_1),$$

falls $\alpha < \cos\frac{\pi}{n}$.

Bemerkung 2. Ist $p = n-1$, so ist a priori klar, dass

$$T_n(x; p+1, \varkappa_{p+1})$$

keine Lösung bilden kann.

3°. Vorausgesetzt, dass $p \geqslant 1$, müssen wir andere Möglichkeiten untersuchen und stellen daher die Frage: unter welchen Umständen besteht die Gleichung

(90) $$T_n(x; s, \tilde{\varkappa}_s) = t_n(x; \alpha, \beta)?$$

Diese Gleichung wird, offenbar, dann und nur dann bestehen, wenn die Gleichung

(c) $$\beta = 2sn^2\left(\frac{n-s}{n}\widetilde{K}_s; \tilde{\varkappa}_s\right) - 1$$

in bezug auf $\check{x}_s$ eine positive und kleinere als Eins Lösung besitzt und wenn

$$\check{\alpha}_{s+1} < \check{\xi}_s \leqslant \alpha \leqslant \check{\alpha}_s$$

erfüllt wird. Nun wissen wir nach (88), dass

$$\beta > \cos\frac{(p+1)\pi}{n};$$

dies zeigt, dass (c) für $s = p + 1$ sicher eine Lösung $\check{x}_{p+1}$ hat, für welche

$$0 < \check{x}_{p+1} < 1,$$

und dass

$$\check{\alpha}_{p+1} < \alpha.$$

Wegen der Ungleichungen

$$\check{\alpha}_{s+1} < \check{\alpha}_s < \check{\alpha}_{s-1} < \ldots$$

muss daher notwendig die Ungleichung

$$s \leqslant p$$

erfüllt sein. Daher kann die Gleichung (90) sicher dann nicht bestehen, wenn

$$\beta \leqslant \cos\frac{p\pi}{n},$$

da in diesem Falle die Gleichung (c) sicher (für $s \leqslant p$) keine unseren Forderungen genügende Lösung in bezug auf $\check{x}_s$ haben kann.

Ist aber

$$\beta > \cos\frac{p\pi}{n},$$

so hat die Gleichung (c) für $s = p$ eine Lösung $\check{x}_p$ $(1 < \check{x}_p < 1)$ und da jetzt

$$\check{\alpha}_{p+1} < \alpha < \check{\alpha}_p$$

erfüllt ist, so muss noch, um die Gleichung (90) mit $s = p$ bestehe, die Ungleichung

(d) $$\check{\xi}_p \leqslant \alpha$$

statt finden.

Mit $s < p$, ebenso wie mit $s > p$, ist (90) unmöglich.

Bemerkung 3. Im Falle $p=n-1$ fällt die Bedingung (d) weg, da hier anstatt (d) die von selbst erfüllte Ungleichung $-1<\alpha$ eintreten wird.

Daher ist im Falle $p=n-1$:

$$t_n(x;\ \alpha,\beta)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos n\arccos x,$$

falls $\beta\leqslant\cos\frac{(n-1)\pi}{n}$, und

$$t_n(x;\ \alpha,\beta)=T_n(x;\ n-1,\ \bar{\varkappa}_{n-1}),$$

falls $\beta>\cos\frac{(n-1)\pi}{n}$.

4°. Ist $1\leqslant p\leqslant n-2$, so kann $t_n(x;\alpha,\beta)$ noch einem Polynom zweiter Art gleich sein. Wir stellen daher die Frage: unter welchen Umständen besteht die Gleichung

$$t_n(x;\ \alpha,\beta)=S_n(x;\ \alpha,\beta)? \tag{91}$$

Aus den schon untersuchten Fällen wissen wir, dass

$$\beta<\beta_p,\quad \alpha>\bar{\alpha}_{p+1}.$$

Aus der Definition der Grössen β_p und $\bar{\alpha}_{p+1}$ folgt dabei, dass

$$t_n(x;\ \alpha,\ \beta_p)=T_n(x;\ p,\ \varkappa_p), \tag{e}$$

$$t_n(x;\ \bar{\alpha}_{p+1},\ \beta)=T_n(x;\ p+1,\ \bar{\varkappa}_{p+1}). \tag{f}$$

Ausserdem sei vorausgesetzt, dass (91) für ein gewisses s erfüllt sei, und es soll entschieden werden, welchen Wert dabei s haben kann.

Zunächchst nehmen wir an, dass $s<p$.

Um diese Möglichkeit zu untersuchen, betrachten wir das Polynom

$$t_n(x;\ \alpha,\ b),$$

wo b einen Parameter bedeutet, welcher von $b=\beta$ bis $b=\beta_p$ wachsen soll.

Für $b=\beta$ hat $t_n(x;\ \alpha,\ b)$ unserer Voraussetzung (91) zufolge in $<b,\ 1>$ $s+1$ Abweichungsstellen; für $b=\beta_p$ wegen (e) hat $t_n(x;\ \alpha,\ \beta)$ in $<b,\ 1>$ schon $p+1$ Abweichungsstellen. Aus der Stetig-

keit des Polynoms $t_n(x; \alpha, b)$ bei Änderung des Parameters b (Satz III) folgt, dass die Anzahl der Abweichungsstellen von $t_n(x; \alpha, b)$ in $< b, 1 >$ nur dann (während der Zunahme der Grösse b von β bis β_p) von $s+1$ bis $p+1$ sich vergrössern kann, wenn für ein gewisses zwischen β und β_p gelegenes $b = B$ die Gleichung $\frac{d}{dx} t_n(x; \alpha, B)\Big|_{x=B} = 0$ erfüllt wird und wenn dabei $t_n(x; \alpha, B)$ in $< B, 1 >$ $s+1$ Abweichungsstellen hat. Daraus folgt aber, dass

$$t_n(x; \alpha, B) = T_n(x; s+1, \varkappa_{s+1})$$

und $B = \eta_{s+1}$.

Besteht also (91) mit einem $s < p$, so ist

$$\beta < \eta_{s+1} < \beta_p$$

und da dies der Ungleichung (86) widerspricht, so kann in (91) die Zahl s sicher nicht kleiner als p sein.

Jetzt wollen wir untersuchen, ob es nicht in (91) die Zahl s grösser als p sein kann.

Varausgesetzt $s > p$, nehmen wir das Polynom $t_n(x; a, \beta)$, wo der Parameter a von $a = \bar{\alpha}_{p+1}$ bis $a = \alpha$ wachsen soll.

Wegen (f) hat $t_n(x; a, \beta)$ in $< -1, a >$ für $a = \bar{\alpha}_{p+1}$ $n-p$ Abweichungsstellen und für $a = \alpha$ $n-s$ Abweichungsstellen; daher existiert ein solches A ($\bar{\alpha}_{p+1} < A < \alpha$), für welches $\frac{d}{dx} t_n(x; A, \beta)\Big|_{x=A} = 0$, wobei die Anzahl der Abweichungsstellen von $t_n(x; A, \beta)$ in $< -1, A >$ $n-s$ gleich ist. Daraus folgt aber, dass

$$t_n(x; A, \beta) = T_n(x; s, \bar{\varkappa}_s)$$

und $A = \bar{\xi}_s$.

Besteht also die Gleichung (91) mit irgend einem $s > p$, so ist

$$\bar{\alpha}_{p+1} < \bar{\xi}_s < \alpha$$

und da dies der Ungleichung (87) widerspricht, so kann in (91) die Zahl s sicher nicht grösser als p sein.

Damit ist bewiesen, dass in (91) die Zahl s nur gleich p sein kann; um aber die Gleichung (91) mit $s = p$ tatsächlich bestehe, müssen noch die beiden Ungleichungen

$$\alpha < \bar{\xi}_p, \quad \beta > \eta_{p+1}. \tag{g}$$

erfüllt sein, welche die Möglichkeiten

$$t_n(x;\alpha,\beta)=T_n(x;p,\bar{\varkappa}_p),\quad t_n(x;\alpha,\beta)=T_n(x;p+1,\varkappa_{p+1})$$

ausschliessen.

5°. Ergebnisse, welche wir in diesem Paragraphen erhalten haben, führen zum Satze.

Satz XVII. Sind die Grössen $\varkappa$, ρ, σ und die naturale Zahl p bestimmt aus den Gleichungen

$$\varkappa^2=\frac{2(\beta-\alpha)}{(1-\alpha)(1+\beta)},\quad \alpha=1-2sn^2\rho,$$

$$-n\rho=pK-\sigma \qquad (-K<\rho<0,\ -K<\sigma\leqslant 0),$$

und ist $\sigma=0$, so hat $t_n(x;\alpha,\beta)$ die Gestalt

$$T_n(x;p,\varkappa);$$

ist dagegen $\sigma \neq 0$, so stimmt $t_n(x;\alpha,\beta)$ mit einer der vier Funktionen

$$\frac{1}{2^{n-1}}\cos n\arccos x,\ T_n(x;p+1,\varkappa_{p+1}),\ T_n(x;p,\bar{\varkappa}_p),\ S_n(x;p;\alpha,\beta)$$

überein; dabei ($\sigma \neq 0$) sind alle Möglichkeiten erschöpft durch die

Tabelle

$p=0$	$\alpha \geqslant \cos\frac{\pi}{n}$	$\frac{1}{2^{n-1}}\cos n\arccos x$
	$\alpha<\cos\frac{\pi}{n}$	$T_n(x;1,\varkappa_1)$
$1\leqslant p\leqslant n-2$	$\cos\frac{(p+1)\pi}{n}\leqslant\alpha<\beta\leqslant\cos\frac{p\pi}{n}$	$\frac{1}{2^{n-1}}\cos n\arccos x$
	$\alpha<\cos\frac{(p+1)\pi}{n},\quad \beta\leqslant\eta_{p+1}$	$T_n(x;p+1,\varkappa_{p+1})$
	$\bar{\xi}_p\leqslant\alpha,\ \beta>\cos\frac{p\pi}{n}$	$T_n(x;p,\bar{\varkappa}_p)$
	$\alpha<\bar{\xi}_p,\ \beta>\eta_{p+1}$	$S_n(x;p;\alpha,\beta)$
$p=n-1$	$\beta\leqslant\cos\frac{(n-1)\pi}{n}$	$\frac{1}{2^{n-1}}\cos n\arccos x$
	$\beta>\cos\frac{(n-1)\pi}{n}$	$T_n(x;n-1,\bar{\varkappa}_{n-1})$

Zusatz. Bezeichnet p den ganzen Teil der Zahl

$$-n\frac{\rho}{K},$$

so hat $t_n(x;\alpha,\beta)$ mindestens $n-p$ Abweichungsstellen in $< -1, \alpha >$ und mindestens $p+1$ Abweichungsstellen in $< \beta, 1 >$.

§ **31. Über parametrische Darstellung des Tschebyscheffschen Polynoms zweiter Art.** Zum Schlusse sollen noch einige Bemerkungen über parametrische Darstellung des Polynoms $S_n(x;p;\alpha,\beta)$ Platz finden.

Auch hier wollen wir dazu die extremale Eigenschaft von $S_n(x;p;\alpha,\beta)$ mit geometrischen Elementen in Zusammenhang bringen.

Ist für irgend welche α, β und n

$$t_n(x;\alpha,\beta)=S_n(x;p;\alpha,\beta),$$

so gibt es, wie wir wissen, zwei gewisse Grössen ζ_1, ζ_2, $(\alpha<\zeta_1<\zeta_2<\beta)$, für welche in den offenen Intervallen $(\alpha_1\zeta_1)$ und (ζ_2,β)

$$|S_n(x;p;\alpha,\beta)|>m_n,$$

wobei

$$S_n(\zeta_1;p;\alpha,\beta)=(-1)^{p+1}m_n,\quad S_n(\zeta_2;p;\alpha,\beta)=(-1)^{p}m_n,$$

$$\max_{\zeta_1\leqslant x\leqslant\zeta_2}|S_n(x;p;\alpha,\beta)|=m_n.$$

Wenn wir die x-Ebene längs der Stecken

$$< 1, \alpha >,\ < \zeta_1, \zeta_2 >,\ < \beta, 1 >$$

zerschneiden, das so entstandene dreifach zusammenhängende Gebiet durch G bezeichnen und zur Abkürzung der Schreibweise

$$S_n(x;p;\alpha,\beta)=y,\quad m_n=L$$

setzen, so wird

(a) $$\eta=\frac{y+\sqrt{y^2-L^2}}{L}$$

in G eindeutige Funktion sein, denn alle Nullstellen von

(b) $$y^2-L^2$$

liegen auf dem Rande von G, während der einzige Pol von (b) in $x = \infty$ liegt und von gerader Ordnung $2n$ ist.

Daher können und wollen wir das Radikal in (a) derart bestimmen, dass η in $x = \infty$ unendlich wird; die so bestimmte Funktion η ist in G von Null verschieden, hat in $x = \infty$ einen Pol n-ter Ordnung und besitzt auf dem Rande von G den konstanten absoluten Betrag Eins.

Wenn wir also

$$\eta = \frac{1}{[\omega(x)]^n}$$

setzen, so ist offenbar $\omega(x)$ die komplexe Greensche Funktion für G in bezug auf den Punkt $x = \infty$.

Da aber G ein dreifach zusammenhängendes Gebiet ist, so genügen schon die elliptischen Funktionen im allgemeinen nicht, um $\omega(x)$ parametrisch darzustellen, hier treten schon automorphe Funktionen ein!

Und in der Tat, wenn wir dass Gebiet G zunächst vermöge automorpher Funktionen auf ein gewisses Kreisgebiet konform abbilden,[22] so kann man nachdem auch $\omega(x)$ und somit auch y vermöge der Schottkyschen Funktionen[23] darstellen. In der unter[21] zitierten Arbeit habe ich dies wirklich ausgeführt.

Н. И. АХИЕЗЕР. О НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЯХ, НАИМЕНЕЕ УКЛОНЯЮЩИХСЯ ОТ НУЛЯ В ДВУХ ЗАДАННЫХ ИНТЕРВАЛАХ (ЧАСТИ I*, II** и III).

РЕЗЮМЕ

Обобщая исследования акад. С. Н. Бернштейна, автор рассматривает ряд вопросов о наилучшем полиномиальном приближении непрерывной функции в точечном множестве $\mathcal{E}$, состоящем из двух интервалов

$$< -1, \alpha >, < \beta, 1 >.$$

После доказательства общих теорем и исследования одного конформного изображения, являющегося основою метода автора, изучается специальный

[22] H. Weber, Ein Beitrag zur Poincaré's Theorie der Fuchs'schen Funktionen (Götting. Nachr. 1886, S. 359—370).

[23] F. Schottky, Über eine spezielle Funktion, welche bei einer bestimmten linearen Transformation ungeändert bleibt (Journ. f. reine u. angew. Mathematik, 101, S. 227—272). — J. Kluyver, A special case of Dirichlet's problem for two dimensions (Acta Mathematica, 21, S. 265—286).

* См. ИМЕН, 1932, № 9, стр. 1163.

** См. ИМЕН, 1933, № 3, стр. 309.

класс полиномов, которые по аналогии с тригонометрическими полиномами можно было бы назвать эллиптическими полиномами; частный случай этих полиномов встречается в работе Е. И. Золотарева.

В дальнейших главах выводятся асимптотические формулы для чебышевских полиномов минимального уклонения относительно любого непрерывного обложения $s(x)$ множества $\mathcal{E}$, при условии, что в $\mathcal{E}$ $s(x) \neq 0$, а также исследуется наилучшее в $\mathcal{E}$ асимптотическое приближение простейших аналитических функций полиномами.

В последней главе рассматривается общая задача параметрического представления Чебышевского относительно $\mathcal{E}$ полинома степени n при любом конечном n.

Метод, которым автор пользуется в этой работе, был им указан в статьях «Sur les polynômes de Tchebyscheff pour deux segments» (C. R., № 18, t. 191) и «Об асимптотических свойствах полиномов на двух интервалах» (ИМЕН, 1931, № 2, стр. 161—178).

Эти работы носят характер предварительных сообщений; кроме того, вторая из них содержит ряд незамеченных вначале недочетов и погрешностей, о чем автор сообщил редакции ИМЕН (см. ИМЕН, 1931, стр. 1189).

Поэтому в настоящей работе дано систематическое изложение результатов, делающее совершенно излишним знакомство с указанными выше двумя предварительными статьями.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1933
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНО-ДВОЙНОЙ ПОЛЯРНОЙ ЗВЕЗДЫ. IV

А. А. БЕЛОПОЛЬСКОГО

Настоящая статья представляет продолжение изучения спектров Полярной, полученных в Пулкове трехпризмовым спектрографом на 30-дюймовом рефракторе. Первые три работы, касающиеся Полярной, опубликованы были в Известиях Академии Наук в 1915, в 1922 и в 1929 гг. Часть спектрограмм, полученных в Пулкове обработаны Леман-Балановской и Газе и напечатаны в Известиях Пулковской обсерватории, № 65 (Лем.-Бал.) и № 97 (Газе). В предлагаемой статье дается обработка спектрограмм, полученных в 1926, 1927, 1928, 1929, 1930 и 1932 гг. В обработке спектрограмм 1926 г. принимали участие, кроме автора, еще Е. И. Жевержеева и В. Крат (Казань). Обработка спектрограмм 1927 г. сделана была сотрудником Ростовского университета А. А. Батыревым и представлена отдельно к напечатанию в Известиях Академии Наук. Спектрограммы 1928, 1929, 1930 и 1932 гг. измерены только автором этой статьи.

Все приемы обработки спектрограмм остались такие же, как и во всех предшествующих статьях. В. Крат и А. А. Батырев измеряли на Гартмановском спектрокомпараторе; автор этой статьи и Е. И. Жевержеева измеряли на приборе В. А. Мессера непосредственное смещение линий железного спектра. Для приведения измерений этими двумя приборами на одну систему некоторые спектрограммы были измерены обоими приборами; полученные таким образом разности введены в окончательный результат.

В 1926 г. получено всего 45 спектрограмм; в таблице 1 даются в 1-м столбце эпохи снимков. Если в один вечер было заснято более одной спектрограммы, то дается средний момент. Во втором столбце даны разности от принятой начальной эпохи, вычисленной на основании периода. $P = 3^d.9682$. Начальная эпоха: 2424602.140 I. D. В третьем столбце

даны средние скорости по измерению Жевержеевой и автора; она измерила все наличные спектрограммы в двух положениях пластинки; число линий, подлежащих измерению доходило до 22, в худшем случае до 8. Мной измерены были те спектрограммы, которые давали уклонения при сопоставлении скоростей. В четвертом столбце даны средние скорости по измерениям В. Крат, который использовал только по одной пластинке для тех дней, когда заснято было их несколько. В пятом столбце даны разности между числами 3-го и 4-го столбцов в смысле 3-й минус 2-й столбец. Полученная средняя разность, равная + 0.60 км, введена в числа 4-го столбца и составлен столбец шестой. Седьмой столбец представляет среднее из третьего и шестого столбцов.

Полученные таким образом скорости собраны в группы по близким эпохам и составлены нормальные скорости, послужившие для начертания кривой скоростей.

Эта кривая характеризуется постоянными метода Леман — Филье $\gamma = -19.6$ км $+ 0.7$ км, где второе число представляет редукцию на принятую в прежних статьях о Полярной систему.

$$A = 4.0 \text{ км}; B = 1.9 \text{ км}$$

Спектрограммы 1927 г. (всего 25) обработаны А. А. Батыревым (см. настоящий № Известий Акад. Наук). Заимствуем из его статьи таблицу нормальных скоростей и кривую, сконструированную по этой таблице.

Нормальные скорости 1927 г.

$t - t_0$	v км	число скоростей
$0^d.484$	—20.6	2
1.459	—16.8	2
1.495	—17.8	3
1.690	—18.6	2
2.346	—21.1	2
2.440	—21.5	2
2.620	—22.3	2
3.334	—22.0	4
3.448	—21.6	2
3.517	—21.8	4

Кривая скоростей 1927 г.

$t - t_0$	v км
$0^d.0$	—21.5
0.5	—19.8
1.0	—17.0
1.5	—17.5
2.0	—20.4
2.5	—21.9
3.0	—22.3
3.5	—22.2

Кривая характеризуется постоянными: $\gamma = -20.3$ км $+ 1.3$ км; $A = 3.9$ км; $B = 2.0$ км; $t - t_0$ считаются от произвольно принятой эпохи.

Спектрограммы 1928 г. сведены в нижеприведенную таблицу (см. табл. 2) нормальных скоростей и кривую скоростей в двух вариантах. Кривая характеризуется следующими постоянными: $\gamma = -15.25$ км $+ 0.7$; $A = 3.45$ км и $B = 3.05$ км — в 1-м варианте; во 2-м варианте $A = 3.65$ км; $B = 2.55$ км.

В следующей, 3-й, таблице даны скорости на 1929 г. Кривая дает: $\gamma = -15.4$ км $\pm$ 0.7 км; A = 3.6; B = 2.3 км.

В 1930 г. удалось получить только 6 спектрограмм в течение трех дней, так что за этот год нет кривой скоростей.

В 1931 г. по причине затянувшегося очередного ремонта 30-дюймового рефрактора наблюдений Полярной не было.

В 1932 г. удалось получить 35 спектрограмм. Полученные по ним скорости даны в таблице 4. В таблице 5 даны нормальные скорости и кривая скоростей, которая характеризуется элементами: $\gamma = -15.2$ км $\pm$ 0.7 км; A = 2.1 км; B = 3.8 км; $t - t_0$ и $t - t_\pi$ означают разности от начальной, произвольной эпохи t_0 = IV, $7^d.400$ средн. Грин. врем. и от эпохи периастрия, полученной в прежние годы (1926). t_π = IV, $14^d.427$ = 2426812.427 I. D. (см. табл. 5 и 6).

Наличный материал, полученный за 30 лет, позволяет вывести некоторые заключения о характере возмущений элементов орбиты Полярной, если только периодические изменения лучевых скоростей в данном случае рассматривать как результат орбитального движения некоторых компонентов двойной звезды.

Нас особенно интересовали элементы γ, ω и e, т. е. движение системы, долгота периастрия и эксцентриситет.

№	T	γ	№	T	γ
1	1888.9	—25 км.	12	1919.5	—16.5 »
2	1896.8	—17.2 »	13	1920.6	—16.6 »
3	1899.6	—11.0 »	14	1922.4	—17.2 »
	»	—11.5* »	15	1923.4	—17.5 »
4	1900.2	—10.4 »		»	—17.5* »
5	1900.9	—10.6 »	16	1924.3	—18.0 »
6	1901.0	—11.8 »	17	1925.2	—19.3 »
7	1905.5	—17.0 »	18	1926.2	—18.9 »
8	1914.2	—16.7 »	19	1927.3	—19.0 »
9	1915.6	—17.8 »	20	1928.2	—14.5 »
10	1916.8	—17.4 »	21	1929.3	—14.7 »
11	1918.7	(—19.4) »	22	1932.3	—14.7 »

Замечания. № 1, 2 и 3 по определениям в Лике; № 4 по определениям Леман в Пулкове; № 5 и 6 по определениям в Потсдаме; № 14 по определениям Газе в Пулкове; № 19 по определениям Батырева в Пулкове; № 3 и 15 со знаком * по определениям Kholodovsky в Лике. Остальные по определениям автора.

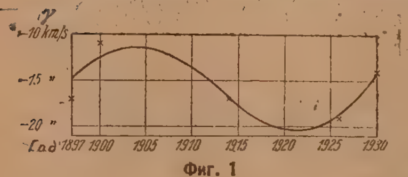
В предыдущих наших статьях, касающихся исследования Полярной звезды, уже сделаны были попытки заметить и определить период изменения числовых величин элементов. Новый материал, накопленный с 1925 г. в совокупности с прежним мы вновь старались использовать с тою же целью. Прежде всего даем таблицу элемента γ с 1896 г. по 1932 г., исправив некоторые ошибки в числах, помещенных в последней статье.

По этой таблице видно уменьшение числовой величины до 1900 г.; затем γ возрастает с 1901 г. по 1905 г. на 5 км. Более медленное возрастание продолжается до 1925—1927 гг.; затем получается скачок с —19 км до —14 км в 1928 г. В 1918 г. значение γ — 19.4 км стоит особняком. Трудно решить, реально ли это значение, или обусловлено инструментальной ошибкой. В предыдущих статьях мы исправили эту величину на основании сравнения с результатом, полученным в 1919 г. Однако теперь, по новом рассмотрении спектрограмм Polaris 1918 г., никаких признаков искажения скоростей инструментального характера не найдено.

В короткой заметке, опубликованной в Astr. Soc. of the Pacific (v. XXXVI, № 209, 1924) авторы ее, Moore и Kholodovsky указывают, что по определениям на обсерватории в Лике период изменения элемента γ равен или длиннее 27 лет. Из нашей таблицы можно составить нормальные значения элемента γ для следующих пяти эпох:

	γ
1897	—17 км
1900	—11 »
1914	—17 »
1926	—19 »
1930	—14.5 »

Проведенная через эти значения кривая (фиг. 1) дает период изменения около 32 лет.



Фиг. 1

При рассмотрении кривых скоростей, полученных за время с 1899 г. по 1932 г., находим, что вид их в разные годы неодинаков; возникает вопрос, не представляют ли эти изменения некоторой зависимости от времени; так как фигура кривой скоростей главным образом есть функция элементов ω и e, то не меняются ли эти элементы в зависимости от времени.

Подход к решению этой задачи очень деликатный, ибо в зависимости от малой величины e элемент ω определяется очень неточно.

Именно, если по нормальным точкам (лучевым скоростям) начерчена кривая и по ней по способу Леман-Филье вычислены элементы орбиты, и их поправки по способу наименьших квадратов на основании остаточных разностей между вычисленной и наблюденной эфемеридами и параллельно значение средних ошибок этих поправок, то получаем такие значения средних ошибок для некоторых годов:

1899—1900	$E = \pm 43^0$
1906	± 4
1914	± 15
1922—1924	± 62 и т. д.

Эта точность, как видно, весьма малая. Однако, не нужно забывать, что каждая кривая, при недостаточном распределении нормальных точек, в течение периода допускает несколько вариантов, и, следовательно, каждый ряд наблюдений может дать ряд вариантов и для элементов орбиты, и приведенные выше средние ошибки в элементе ω в действительности должны быть еще увеличены.

Таким образом, надежным критерием достоверности числового значения элемента ω служит количество нормальных точек и распределение их равномерно по всему периоду, что в значительной степени уменьшает произвол при проведении кривой скорости.

В дальнейшем даем таблицу, с элементами орбиты Полярной, определенными в разные годы, а именно ординаты A, B; площади Z_1 и Z_2; элементы ω и e и числа нормальных точек, по которым проведена кривая (табл. 7).

Можно искать возмущения элемента ω в двух направлениях: 1) искать кратковременный период изменения, напр. меньше одного года, и, если такового не обнаружится, 2) искать длинных периодов больше года.

Для решения первого вопроса мы воспользовались весенними и осенними наблюдениями Полярной, которых в 1914 г. и 1920 г. оказалось в достаточном количестве, чтобы провести с уверенностью кривые скоростей.

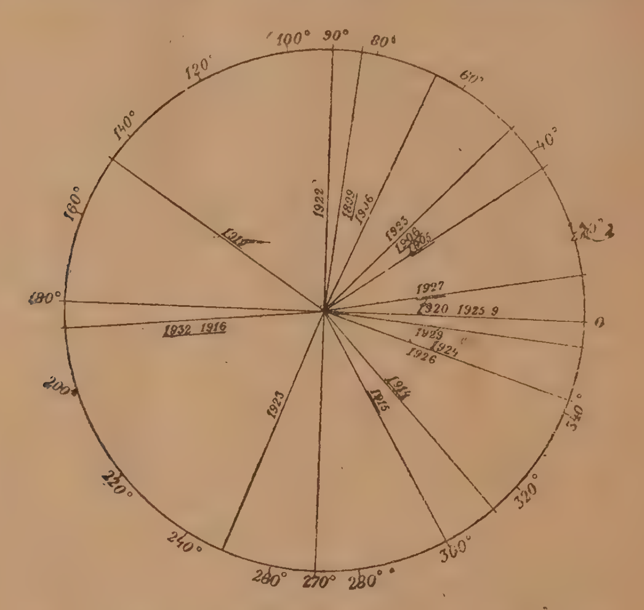
В следующей таблице (стр. 542) приведены элементы отдельно для весенних и осенних наблюдений и характеристики кривых, начертанных по этим скоростям.

Отсюда заключаем, что полугодового изменения элементов нет, ибо разности полученных чисел — порядка возможной средней ошибки при определении элемента.

Обратимся к рассмотрению кривых скоростей, разделенных промежутком времени больше года (см. табл. 7).

Год	γ	A	B	Z_1	Z_2	ω	e
1914.24	—16.8 км	3.2 км	2.3 км	+155	—117	319°	0.21
1914.73	—16.8	3.2	2.4	+159	—116	309	0.20
1920.4	—17.2	2.9	2.8	+155	—145	340	0.01
1920.9	—17.5	2.5	3.0	+134	—131	360	0.00

Объяснения: γ — движен. системы; A — наибольш. положит. координата; B — наибольш. отриц. координата; Z_1 и Z_2 — площади кривой; ω — долгота периастрия; e — эксцентриситет.



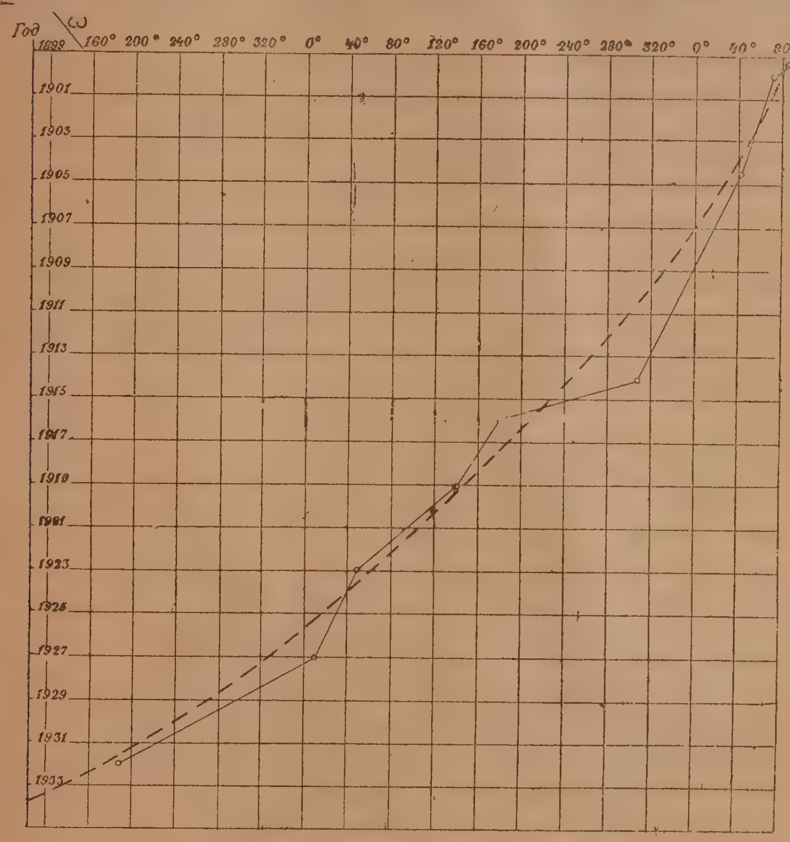
Фиг. 2. Положение линии апсид в орбите Полярной за 32 года.

Среди них выделим те, по которым получается приблизительно одинаковый эксцентриситет; характер таких кривых исключительно будет зависеть только от четверти, в которой заключается ω. Кроме того, больший вес следует придать тем кривым, которые вычерчены по большему числу точек (столбец n, число нормальных скоростей) и у которых эти точки распределены равномерно по всей кривой.

Из упомянутой таблицы видно, что эксцентриситет с 1899 до 1924 г. (исключая 1916—1918 гг.) примерно сохраняет значение $e = 0.1$, а после 1924 до 1932 г. держится около 0.25 (по определениям в обсерваториях Лика

и Потсдама имеем в 1899 и 1901 гг. $e = 0.1$; в 1923 г. (Лик) $e = 0.2$ (Lick Obs. Bull., № 355).

За этот промежуток времени, судя по характеру кривых скоростей, значения ω находятся в 1-й и 4-й четверти, притом с 1899 г. по 1905 г.



Фиг. 3. Polaris. Значения ω.

значение его около 50°. За 1923 г. и 1927 г. $\omega = 30°$. За годы **1914**, **1915**, 1918, **1920**, 1924 (выделенные жирным шрифтом с бо́льшим весом) значение ω находится исключительно в 4-й четверти (330°). Наконец, кривые, дающие наибольший эксцентриситет ($e = 0.3$), характеризуются значениями ω, во 2-й и 3-й четвертях (1916.8, 1919.2 и 1932.3). За $\omega = 170°$. Кривые прочих лет имеют малый вес, а потому их не принимаем в рассмотрение.

На прилагаемой диаграмме (фиг. 2) нанесены положения линии апсид орбиты Полярной за все годы наблюдений по последней таблице.

Отсюда можно бы заключить, что числовые значения элемента ω убывают со временем. Это предположение подтвердилось, когда отдельные значения ω нанесены были на сетку, в которой время откладывалось по ординатам, а ω по абсциссам (см. фиг. 3).

Через нанесенные точки можно провести плавную линию, составляющую с линиею апсид примерно угол в 45°; она дает намек на то, что линия апсид совершает полный оборот примерно около 20 лет ($\frac{600^0}{32} = 18^0.75$; период $= 19.2$ года). Проведенная кривая на диаграмме отличается от заданных значений ω на величину средней ошибки, $E = \pm 14^0$. Эти числа меньше средней ошибки определения ω по кривой скоростей.

При рассмотрении всех нами вычерченных кривых скоростей обнаружилось, что они по сходству фигуры разбиваются на несколько групп (не обращая внимания на элемент γ, который на фигуру кривой не влияет).

Так, в отдельные группы можно соединить кривые:

1900 и 1905 гг.	в одну	группу	I
1924, 1926, 1927 и 1929 гг. . . .	»	»	II
1914 и 1915 гг.	»	»	III
1916 и 1932 гг.	»	»	IV

Это дает возможность использовать лучевые скорости годов каждой группы для составления общих нормальных скоростей и по ним начертить четыре кривых, по которым элементы орбиты получатся точнее, чем когда их определяли отдельно для каждого года.

Таким образом получены следующие кривые и элементы орбиты:

I группа эпоха 1905 г.		II группа эпоха 1927 г.		III группа эпоха 1914 г.		IV группа эпоха 1916 г.	
$t-t_\pi$	v км	$t-t_\pi$	v км	$t-t_\pi$	v км	$t-t_\pi$	v км
$0^d.00$	−19.0	$0^d.00$	−21.5	$0^d.03$	−19.2	$0^d.00$	−22.4
0.30	−19.5	0.45	−20.4	0.53	−19.2	0.30	−22.6
0.54	−19.5	0.65	−19.0	0.93	−18.6	0.70	−21.5
0.90	−19.2	0.85	−17.9	1.23	−16.8	0.90	−18.6
1.00	−18.9	1.00	−17.0	1.73	−14.8	1.00	−17.9
1.24	−18.2	1.20	−16.6	2.00	−13.8	1.20	−17.3
1.40	−17.5	1.50	−17.5	2.10	−13.5	1.40	−16.9
1.60	−16.8	1.55	−18.1	2.60	−13.5	1.60	−16.7
1.80	−16.0	1.70	−19.0	3.00	−15.8	2.00	−16.5
2.10	−14.8	2.00	−20.7	3.20	−16.6	2.50	−16.6
2.50	−13.7	2.30	−21.6	3.50	−18.0	3 00	−17.1

I группа эпоха 1905 г.		II группа эпоха 1927 г.		III группа эпоха 1904 г.		IV группа эпоха 1916 г.	
$t-t_\pi$	v км.	$t-t_\pi$	v км.	$t-t_\pi$	v км.	$t-t_\pi$	v км.
2.70	−13.6	2.50	−21.9	3.70	−18.5	3.24	−17.6
2.88	−14.0	2.80	−22.2	3.90	−19.0	3.44	−18.5
3.25	−16.1	3.10	−22.4	3.97	−19.2	3.58	−19.9
3.50	−17.5	3.40	−22.3	—	—	3.97	−22.4
3.66	−18.1	3.80	−21.9	—	—	—	—
3.85	−18.7	3.97	−21.5	—	—	—	—
3.97	−19.0	—	—	—	—	—	—
$A = 3.40$ км	$\gamma = -16.2$ км	$A = 3.83$ км	$\gamma = -19.7$ км	$A = 3.2$ км	$\gamma = -16.0$ км	$A = 2.05$ км	$\gamma = -17.9$ км
$B = 2.60$ »	$Z_1 = 136$	$B = 2.00$ »	$Z_1 = +124$	$B = 2.7$ »	$Z_1 = +154$	$B = 3.20$ »	$Z_1 = +165$
$e = 0.16$	$Z_2 = -160$	$e = 0.32$	$Z_2 = -148$	$e = 0.09$	$Z_2 = -146$	$e = 0.30$	$Z_2 = -155$
$\omega = 31°$		$\omega = 15°$		$\omega = 343°$		$\omega = 185°$	

Трудно обнаружить возмущения прочих элементов орбиты. Нами принят постоянный период $P = 3^d.9682$.

Элемент $K = \frac{A + B}{2}$ получился в среднем равным 2.91 км. При выводе разности этого значения с отдельными определениями обнаружился небольшой ход в знаках, а именно:

для	1899.7, 1900, 1905.5	разность K — средн.	$= +0.02$ км
»	1914.4, 1915.6, 1916.8, 1919.2	»	$= -0.01$ »
»	1920.6, 1922.4, 1924.3, 1926.2	»	$= +0.06$ »
»	1927.3, 1928.3, 1929.3, 1932.3	»	$= -0.09$ »

Среднее значение $K = 2.91$ км дает:

для $e = 0.1$ значение $a \sin i = 158\,000$ км

» $e = 0.3$ » » $= 152\,000$ »

A. BELOPOLSKY. RECHERCHES SUR LES ÉLÉMENTS DE L'ORBITE DE L'ÉTOILE POLAIRE

RÉSUMÉ

Dans l'article présent nous donnons les résultats d'observations des vitesses radiales de la Polaire depuis 1899 jusqu'à 1932, par la plupart obtenus à l'Observatoire de Poulkovo au moyen du spectrographe à trois prismes sur le 30p..

Les éléments de l'orbite trouvés pour chaqune des années ont été étudiés pour trouver s'il n'y a pas des changements de leur valeurs numériques.

Ce sont les éléments γ, e et ω, qui ont principalement attiré notre attention.

L'élément γ, a ce qu'il paraît, commence à décroître depuis 1928.

On trouve quelques changements dans la valeur de e qui a reçu la valeur 0.2 et 0.3 pour les dernières années.

Pour les valeurs de ω nous avons tracé deux diagrammes, au moyen desquels on peut voir que la ligne des apsides a changé sa position de 600^0 pendant 32 ans, or on peut en conclure, que la période de ce mouvement est à peu près égale à 19 années.

ТАБЛИЦА 1

Polaris. 1926 III 27.140 + $3^d_.9682$ $(t - t_0)$

	t	$t - t_0$	Ж км	K км	км	км	v км	число спектрограмм
III	27.456	$0^d_.316$	— 18.0	— 17.7	— 0.3	— 17.1	— 17 6	1
IV	8.394	0.348	— 18.7	— 18.6	— 0.6	— 18.0	— 18.4	2
	16.374	0.392	— 18.0	— 20.1	+ 2.1	— 19.5	— 18.8	2
	28.372	0.486	— 18.4	— 20.6	+ 2.2	— 20.0	— 19.2	2
V	6.370	0.547	— 17.6	— 19.9	+ 2.3	— 19.3	— 18.4	2
	18.362	0.652	— 16.0	— 15.6	— 0.4	— 15.0	— 15.5	1
IV	9.378	1.346	— 18.6	— 16.7	— 1.9	— 16.1	— 17.4	1
	17.358	1.394	— 20.2	— 21.4	+ 1.2	— 20.8	— 20.5	2
	25.325	1.408	— 19.8	— 21.3	+ 1.5	— 20.8	— 20.3	1 оч. слаб.
	21.374	1.425	— 18.8	— 19.7	+ 0.9	— 19.1	— 19.0	1
XI	22.425	2.193	— 19.9	—	—	—	— 19.9	2
III	29.420	2.280	— 21.3	— 25.6	+ 4.3	— 25.0	— 23.2	1 оч. слаб.
IV	2.414	2.312	— 19.0	— 19.3	+ 0.3	— 18.7	— 18.8	2
	6.414	2.338	— 20.5	— 18.1	— 2.4	— 17.5	— 19.0	1
	26.355	2.417	— 19.8	— 20.8	+ 1.0	— 20.2	— 20.0	

	t	t — t_0	Ж км	К км	км	км	v км	число спектрограмм
V	4.367	2.517	— 20.3	— 20.7	+ 0.4	— 20.1	— 20.2	2
	12.362	2.572	— 20.4	— 18.2	— 2.2	— 17.6	— 19.0	2
	24.346	2.661	— 21.0	— 22.0	+ 1.0	— 21.4	— 21.2	1
IX	24.424	2.706	— 22.4	—	—	—	— 22.4	2
IV	3.440	3.332	— 21.2	— 20.6	— 0.6	— 20.0	— 20.6	2
	11.384	3.339	— 19.6	— 22.7	+ 3.1	— 22.1	— 20.8	2
	7.434	3.358	— 20.0	— 19.8	— 0.2	— 19.2	— 19 6	1
	19.353	3.372	— 22.3	— 24.2	+ 1.9	— 23.6	— 23.0	1 слаб.
	27.364	3.428	— 20.5	— 18.3	— 2.2	— 17.7	— 19.1	3
V	5.398	3.544	— 20.6	—(24.6)	+ 4.0	— 24.0	— 20.6	2
IX	25.426	3.717	— 21.8	—	—	—	— 21.8	2
X	7.424	3.810	— 19.4	—	—	—	— 19.4	1
				Средн.	+ 0.60			45

Нормальные скорости 1926.25

t — t^0	v км.	n
$0^d.386$	— 18.6	4
0.547	— 18.5	1
0.652	— 15.6	1
1.393	— 19.3	4
2.343	— 20.2	6
2.646	— 20.9	3
3.364	— 20.2	4
3.630	— 21.2	2
3.810	— 19.4	1

Кривая скоростей. 1926.25

t — t_0	v км.
0.39	— 18.2
0.55	— 16.6
0.65	— 15.8
1.39	— 18.7
2.34	— 20.6
2.65	— 21.0
3.36	— 21.0
3.63	— 20.7
3.81	— 20.3

ТАБЛИЦА 2

Polaris 1928 III $18^d.352 + 3^d.9682$ (t — t_0)

	t	t—t_0	v км	Нормальные скорости t—t_0	v км	число спектр.	Кривая скоростей t — t_0	v км 1 вариант	v км 2 вариант
III	26.440	0.152	—18.3	$0^d.152$	—18.3	1	$0^d.00$	—18.2	—17.0
IV	23.357	0.239	—16.3	0.311	—16.4	2	0.25	—17.0	—16.2
	27.361	0.329	—16.4	0.723	—11.9	1	0.35	—16.0	—15.5
X	19.358	0.723	—11.9	1.283	—11.8	2	0.45	—14.6	—14.7
IV	8.448	1.256	—11.6	1.365	—13.0	1	0.50	—14.0	—14.2
	24.374	1.310	—12.0	2.226	—13.9	2	0.65	—12.8	—12.8
V	2.365	1.365	—13.0	2.346	—16.3	2	0.85	—12.0	—11.7
III	24.458	2.138	—14.3	3.182	—17.0	2	1.00	—11.8	—11.6
IV	25.378	2.314	—13.5	3.270	—15.8	2	1.20	—12.0	—11.8
	29.369	2.337	—16.1	3.314	—18.0	2	1.35	—12.4	—12.2
V	3.354	2.354	—16.4	4.120	—18.3	1	2.00	—14.2	—14.7
III	25.479	3.159	—17.9				2.80	—16.2	—17.0
IV	14.365	3.205	—16.2				3.35	—17.6	—17.8
	10.458	3.266	—15.8				3.65	—18.2	—17.7
	22.369	3.273	—15 8				3.75	—18.3	—17.6
	26.369	3.305	—18.5				4.00	—18.0	—17.1
IV	30.354	3.322	—17.6						

ТАБЛИЦА 3

1929 V $1^d.077 + 3^d.9682\ (t - t_0)$

				Нормальные скорости			Кривая скоростей	
	t	$t - t_0$	v км	$t - t_0$	v км	числ. спектр.	$t - t_0$	v км
V	9.415	0.402	— 11.8	0.402	— 11.8	1	$0^d.40$	— 11.8
	25.386	0.500	(17.2)?	1.422	— 15.0	2	1.36	— 15.2
	10.370	1.357	— 13.0	2.419	— 16.8	1	1.95	— 17.0
	26.374	1.488	— 16.9	3.336	— 16.2	2	2.60	— 17.7
	11.389	2.376	— 16.9	3.416	— 17.3	2	3.10	— 17.4
	23.380	2.462	— 16.8				3.32	— 17.0
	4.395	3.318	— 16.5				3.80	— 14.8
	4.431	3.354	— 15.9					
	12.390	3.377	— 17.9					
	24.374	3.456	— 16.7					

ТАБЛИЦА 4

Polaris 1932

№№		От полудня сред. гр. вр.	v	$t - t_\pi$	$t - t_0$	№№	$t - t_\pi$	v
1	IV	17.400	(—8.4) км	2.973	0.000	1	$0^d.085$	—15.4 км
2		21.468	—16.2	3.072	0.100	2	0.130	—15.0
3		21.511	—17.6	3.115	0.143	3	0.173	—17.1
4		22.449	—15.4	0.085	1.081	4	0.242	—15.1
5		22.494	—15.0	0.130	1.126	5	0.270	—15.6
6		27.444	—14.1	1.112	2.108	6	0.314	—15.6
7		27.486	—12.7	1.154	2.150	7	0.341	—16.8
8		27.512	—14.1	1.180	2.176	8	0.373	—16.1
9	V	1.545	—16.5	1.245	2.241	9	1.112	—14.1
10		7.429	—16.5	3.161	0.189	10	1.154	—12.7
11		7.470	—16.1	3.202	0.230	11	1.175	—13.5
12		7.504	—16.2	3.236	0.262	12	1.180	—14.1
13		8.410	—17.1	0.173	1.168	13	1.205	—14.7
14		16.415	—15.1	0.242	1.236	14	1.218	—13.5
15		16.443	—15.6	0.270	1.264	15	1.226	—13.0
16		17.348	—13.5	1.175	2.169	16	1.245	—13.4
17		17.378	—14.7	1.205	2.199	17	1.260	—13.8
18		17.391	—13.5	1.218	2.212	18	1.292	—14.4
19		18.334	—14 2	2.161	3.155	19	1.297	—12.2
20		21.367	—13.0	1.226	2.223	20	1.320	—13.9
21		26.431	—14.1	2.322	3.316	21	1.345	—12.6
22		27.320	—17.3	3.211	0.245	22	2.161	—14.2
23		27.369	—18.3	3.260	0.286	23	2.322	—14.1
24		27.411	—18.2	3.302	0.328	24	2.973	—(8.4)
25		28.392	—15.6	0.314	1.308	25	3.072	—16.2
26		29.338	—13.8	1.260	2.255	26	3.115	—17.6
27		29.370	—14.4	1.292	2.287	27	3.162	—16.5
28		29.398	—13.9	1.320	2.315	28	3.202	—16.1
29		31.328	—17.5	3.250	0.276	29	3.211	—17.3
30		31.362	—19.1	3.284	0.310	30	3.236	—16.2
31		31.404	—19.2	3.326	0.352	31	3.250	—17.5

№№		От полудня сред. гр. вр.	v	$t-t_\pi$	$t-t_0$	№№	$t-t_\pi$	v
32	IV	1.387	—16.8	0.341	1.335	32	3.260	—18.3
33		1.419	—16.1	0.373	1.367	33	3.284	—19.1
34		2.343	—12.2	1 297	2.291	34	3.302	—18.2
35		2.391	—12.6	1.345	2.339	35	3.326	—19.2

ТАБЛИЦА 5

Polaris 1932

Нормальные скорасти t_π = IV 14.427; t_0 = IV 7.400

$t-t_0$	$t-t_\pi$	v км	$t-t_0$	$t-t_\pi$	v км
0.122	3.094	—16.9	1.351	0.357	—16.4
0.248	3.220	—17.0	2.129	1.132	—13.4
0.330	3.304	—18.8	2.172	1.178	—13.8
1.081	0.085	—15.4	2.220	1.224	—13.6
1.147	0.152	—16.0	2.298	1.314	—13.3
1.269	0.275	—15.4	3.236	2.242	—14.2

ТАБЛИЦА 6

Кривая скоростей 1932 г.

$t-t_0$	v	$t-t_0$	v	$t-t_0$	v
$0^d.0$	-15.5_5 км	$1^d.2$	—16.0 км	$2^d.5$	-13.4_v км
0.2	—17.0	1.4	—14.9	2.8	—13.5
0.4	-19.2_5	1.6	—14.3	3.0	-13.5_v
0.6	—19.55	1.8	—13.9	3.3	—13.8
0.8	-19.5_5	2.0	-13.6_5	3.5	—14.1
1.0	—19.1	2.2	—13.5	4.0	—15.7

ТАБЛИЦА 7

№	t	Z_1	Z_2	e	ω	A	B	K	n
1	1899.7	164	— 224	0.14	84°	3.1 км	3.0 км	3.05 км	12
2				0.09	74	—	—	—	—
3	1900	125	— 125	0.05	57	2.8	2.4	2.60	20
4	1905.5	136	— 160	0.16	40	3.4	2.6	3.00	9
5	1914.4	157	— 116	0.21	314	3.2	2.4	2.80	13
6	1915.6	178	— 140	0.14	299	3.2	2.8	3.00	15
7	1916.8	165	— 155	0.30	185	2.0	3.9	2·95	14
8	1919.2	132	— 148	0.10	146	2.8	3.3	3.05	13
9	1920.6	144	— 138	0	—	2.7	2.9	2.80	13
10	1922.4	112	— 132	0.06	90	2.8	2.8	2.8	4
11	1923	—	—	0.19	47	—	—	—	—
12	1924.3	150	— 129	0.24	342	3.5	2.3	2.90	10
13	1926.2	130	— 100	0.39	342	3.9	1.8	2.85	10
14	1927.3	140	— 140	0.33	5	3.9	2.0	2.95	10
15*	1932.3	128	— 120	0·30	186	2.1	3.8	2.95	12
16	1932.3	140	— 122	0.21	202	2.35	3.5	292	«

* Два варианта

Примечания к таблице 7 (по номерам)

1. Результат комбинации наблюдений в обсерваториях Лика и Потсдама
2. Только по наблюдениям на обсерватории Лика. См. Lick Observ. Bull., v. XXXVI, № 209.
3. По определ. в Пулкове. См. Lehmann, Mitt. Stern. Pulkovo № 65, переработано автором.
4. То же, переработано автором.
5. См. Изв. Акад. Наук, 1915, переработано автором.
6. То же, см. Изв. Акад. Наук., 1922.
7. То же. Тщательно переработано, см. Изв. Акад. Наук, 1922.
8. То же.
9. Комбинация наблюдений весной и осенью.
10. Только наблюдения в 1922 г., см. Hase, Mitt. d. Stern. Pulkovo, № 97, обработ. автором.
11. См. Lick Observ. Bull., v. XXXVI, № 209.
12. См. Изв. Акад. Наук, 1927, вновь переработано автором
13. По наблюдениям в Пулкове.
14. То же, обработано А. А. Батыревым.
15. То же, обработано автором.
16. То же, обработано автором.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1933
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

ОРБИТА СПЕКТРАЛЬНО-ДВОЙНОЙ ПОЛЯРНОЙ ПО НАБЛЮДЕНИЯМ 1927 г. В ПУЛКОВЕ

А. А. БАТЫРЕВА

(*Представлено академиком* А. А. Белопольским)

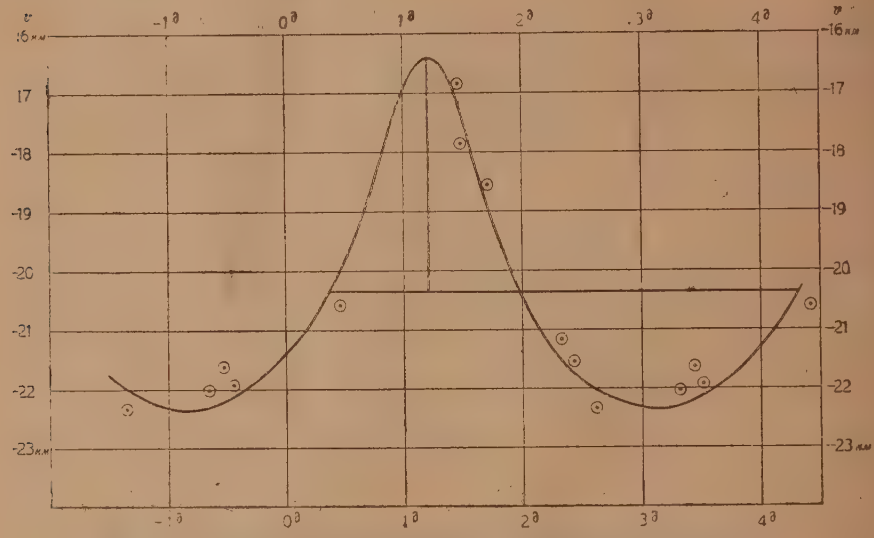
Настоящая работа выполнена мною по предложению А. А. Белопольского и является продолжением исследований орбиты Полярной, которые ведутся в Пулкове уже более 30 лет.

Мною были обработаны спектрограммы, полученные А. А. Белопольским в апреле, мае и начале июня 1927 г. на 30″ рефракторе при помощи 3-х призмового спектрографа. Условия получения спектрограмм были те же, как они описаны в работах А. А. Белопольского; в начале и конце экспозиции в качестве спектра сравнения фотографировался спектр вольтовой дуги между железными электродами. Спектрограммы 1927 г. все прекрасного качества, линии очень резки. Измерения пластинок производились на спектрокомпараторе Цейсса при увеличении 15 раз. За основную была принята спектрограмма Полярной 11 X 1915 г. I, постоянные для которой были определены А. А. Белопольским (Изв. Акад. Наук, 1922 г.), причем $v_0 = -28.50 \frac{\text{км}}{\text{сек.}}$. Совмещение линий основной и измеряемой спектрограмм производилось группами (не менее 7 групп на каждой пластинке), причем была использована часть спектра между 402 и 450 $\mu\mu$. После измерения в одном положении пластинка поворачивалась на 180° и вновь измерялась. Всего в моем распоряжении было 26 спектрограмм, но одна из них (3 VII) не была использована, ибо, повидимому, во время ее получения произошло какое-то резкое смещение инструмента, вследствие чего линии земного источника сдвинуты относительно друг друга на 16 $\frac{\text{км}}{\text{сек.}}$.

Все данные относительно измеренных спектрограмм приведены в таблице 1; за исходную эпоху T_0 принят J. D. 2424984.114 (1927 г. Апр. 12.114); счет суток ведется от полудня; v_a есть редукция на центр Солнца,

найденная по таблицам Schlesinger'a; ε — ошибка арифметического среднего для данной пластинки.

Полученные лучевые скорости Полярной (V) были соединены в нормальные, как это показано в таблице 2 и по этим нормальным скоростям построена прилагаемая кривая.



Фиг. 1. Лучевые скорости Полярной по наблюдениям 1927 г. в Пулкове.

Элементы орбиты определены по методу Lehmann-Filhès; получены следующие значения:

$\gamma = -20.32 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$ $A = 3.92$ $B = 2.03$

$z_1 = 100$

$z_2 = -112$ (в единицах планиметра)

$u_1 = 108°\ 31'$; $u_2 = 251°\ 29'$

$\omega = 9°\ 35'$

$e = 0.32$

$T_\pi = 1.^d287$ (от принятой эпохи T_0)

$a \sin i = 154000$ km.

По найденным элементам орбиты была вычислена при помощи формулы

$$\frac{dz}{dt} = \frac{A+B}{2} \cos u + \frac{A-B}{2}$$

эфемерида, сравнение которой с кривой приведено в таблице 3. Разности О — С малы, и поэтому элементы орбиты можно оставить без улучшения.

В заключение считаю долгом выразить глубокую благодарность А. А. Белопольскому за предоставление материала и руководство моей работой.

Пулково, январь 1932 г.

Таблица 1

№№	Ср. Грин. вр.		$t - T_0$	v	$v_0 + v_\alpha$	V	ε
1	Апреля	15.414	3.300	+ 16.91	— 39.26	— 22.35	± 0.49
2	»	15.444	3.330	+ 16.60	— 39.26	— 22.66	± 0.55
3	»	18.410	2.328	+ 17.76	— 38.96	— 21.20	± 0.72
4	»	18.445	2.363	+ 17.89	— 38.96	— 21.07	± 0.45
5	»	19.420	3.338	+ 17.72	— 38.86	— 21.14	± 0.42
6	»	19.450	3.368	+ 17.04	— 38.86	— 21.82	± 0.43
7	»	29.431	1.443	+ 21.02	— 37.65	— 16.63	± 0.39
8	»	29.462	1.475	+ 20.60	— 37.65	— 17.05	± 0.32
9	Мая	1.420	3.433	+ 17.13	— 37.38	— 20.25	± 0.91
10	»	1.451	3.464	+ 14.48	— 37.38	— 22.90	± 0.35
11	»	2.424	0.468	+ 16.73	— 37.24	— 20.51	± 0.35
12	»	2.456	0.500	+ 16.61	— 37.24	— 20.63	± 0.30
13	»	3.417	1.461	+ 19.14	— 37.09	+ 17.95	± 0.84
14	»	4.370	2.414	+ 15.99	— 36.95	+ 20.96	± 0.73
15	»	4.422	2.466	+ 14.87	— 36.95	+ 22.08	± 0.57
16	»	7.419	1.496	+ 17.87	— 36.50	— 18.63	± 0.34
17	»	7.451	1.528	+ 19.63	— 36.50	— 16.87	± 0.67
18	»	9.415	3.492	+ 15.05	— 36.19	— 21.14	± 0.54
19	»	9.452	3.529	+ 14.46	— 36.19	— 21.73	± 0.78
20	»	17.369	3.509	+ 12.83	— 34.86	— 22.03	± 0.44
21	»	17.399	3.539	+ 12.58	— 34.86	— 22.28	± 0.67
22	»	28.367	2.602	+ 10.49	— 32.38	— 21.89	± 0.39
23	»	28.404	2.639	+ 9.61	— 32.38	— 22.77	± 0.47
24	Июня	4.375	1.673	+ 12.31	— 32.03	— 18.72	± 0.62
25	»	4.408	1.706	+ 12.62	— 31.03	— 18.41	± 0.44

Таблица 2

Нормальные скорости

№№	$t - T_0$	V	NN
1	0.484	— 20.57	11, 12
2	1.459	— 16.84	7, 8
3	1.495	— 17.82	13, 16, 17
4	1.690	— 18.56	24, 25
5	2.346	— 21.14	3, 4
6	2.440	— 21.52	14, 15
7	2.620	— 22.33	22, 23
8	3.334	— 21.99	1, 2, 5, 6
9	3.448	— 21.58	9, 10
10	3.517	— 21.80	18, 19, 20, 21

Таблица 3

$t - T_\pi$	v вычисл.	v по кривой	$O - C$
0^d	— 21.45	— 21.47	— 0.02
0.5	— 19.83	— 19.80	+ 0.03
1.0	— 17.11	— 16.95	+ 0.16
1.5	— 17.37	— 17.50	— 0.13
2.0	— 20.51	— 20.45	+ 0.06
2.5	— 21.92	— 21.87	+ 0.05
3.0	— 22.35	— 22.34	+ 0.01
3.5	— 22.16	— 22.15	+ 0.01

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1933
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

ОРБИТА СПЕКТРАЛЬНО-ДВОЙНОЙ β PERSEI (АЛГОЛЬ) ПО НАБЛЮДЕНИЯМ 1912 И 1930 гг. В ПУЛКОВЕ

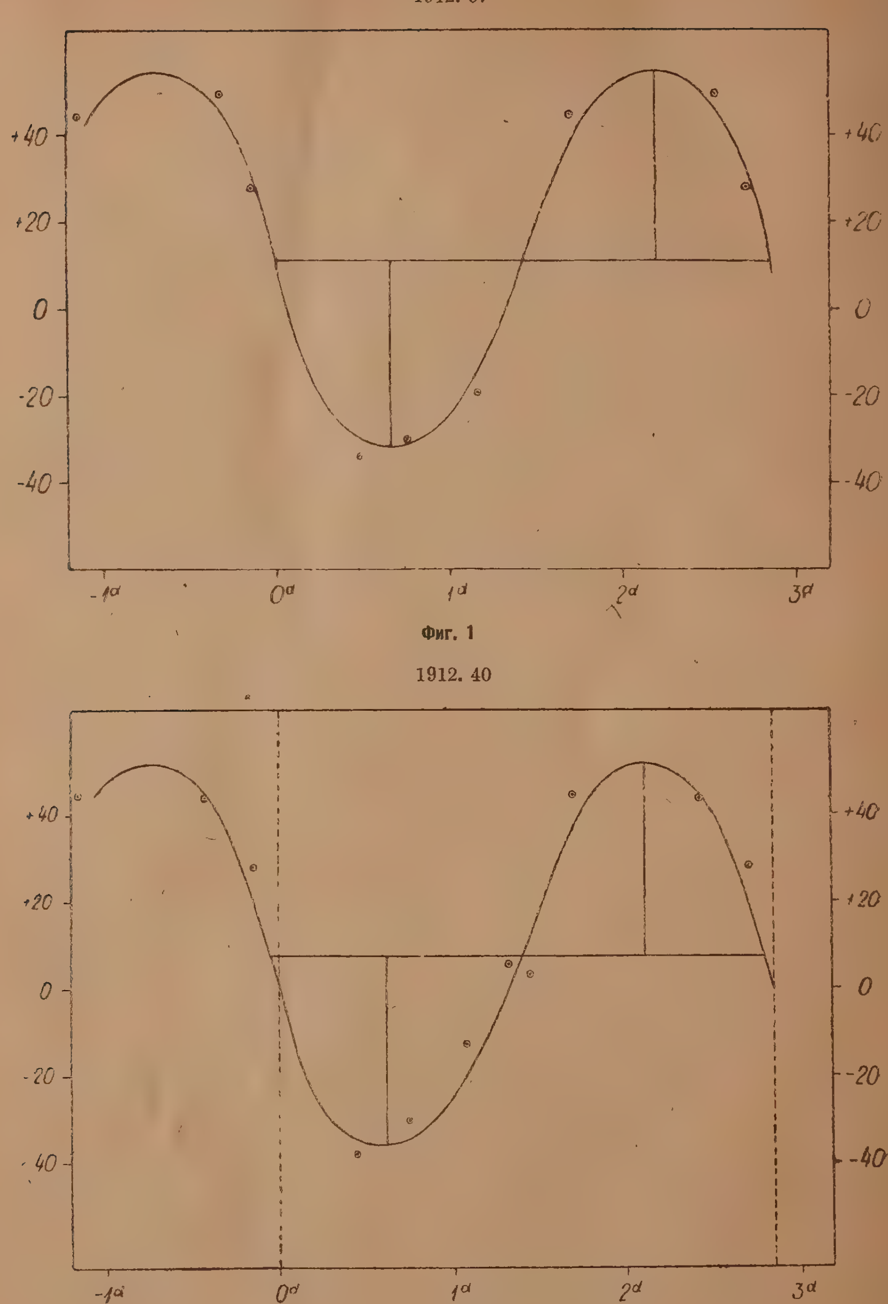
А. А. БАТЫРЕВА

(*Представлено академиком* А. А. Белопольским)

Обработка спектрограмм Алголя, принадлежащего к спектральному типу B_8, представляет значительные трудности в виду малого числа линий, допускающих точные измерения. Большая часть линий расплывчата и только у *Mg* (448.4 $\mu\mu$) и *He* (447.2) имеют достаточно резкие очертания. В пределах от 410 до 490 $\mu\mu$ были использованы для определения лучевых скоростей следующие линии: $H\delta$ (410.2 $\mu\mu$), *He* (447.2), $H\gamma$ (434.1), *Mg* (448.4), H_β (486.1) и только на одной из спектрограмм — *Fe* (425.0). Значения скоростей, найденные по линиям H_δ и H_β, в нескольких случаях пришлось отбросить, так как они резко отличались от других определений на тех же пластинках.

Спектрограммы Алголя, любезно предоставленные в мое распоряжение А. А. Белопольским, получены им на пулковском 30″ рефракторе при помощи трехпризмового спектрографа в 1912 и 1930 гг. Измерения были сделаны на спектрокомпараторе Цейсса, причем за основную пластинку была принята спектрограмма Полярной 11 X 1915 г. $\left(v_0 = -28.50 \frac{\text{км}}{\text{сек.}}\right)$. Все данные относительно измеренных спектрограмм приведены в таблицах 1 и 2, за T_0 принят момент ближайшего предшествующего наблюдению минимума яркости. Средняя ошибка определения скорости составляет $\pm$ 3. 5 км. Нормальные скорости помещены в таблицах 3 и 4.

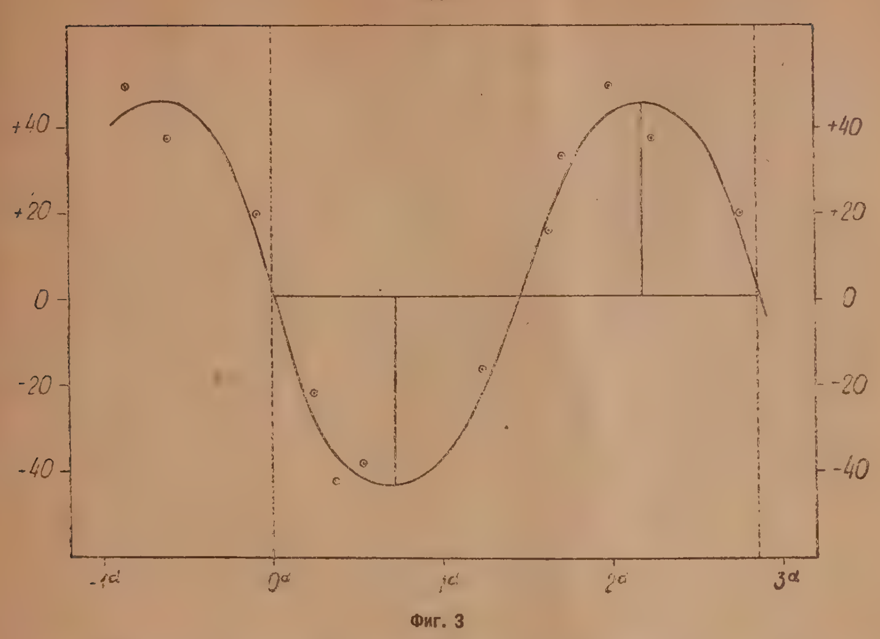
Наблюдения 1912 г. естественно разбиваются на две группы (I—II и X—XI), но при этом вследствие малого числа спектрограмм провести сколько-нибудь уверенно кривую скоростей оказалось возможным только для первой группы, во второй группе точек слишком мало (7) и распределены они неудачно. Поэтому при обработке спектрограмм 1912 г. я построил 2 кривые: по наблюдениям первых двух месяцев (1912.07) и всего года (1912.40). Наблюдения же 1930 г. пришлось все соединить в одну группу.


1912. 07
+40
+20
0
-20
-40
-1d
0d
1d
2d
3d
1912. 40
+40
+20
0
-20
-40
-1d
0d
1d
2d
3d

Фиг. 1

Фиг. 2





Фиг. 3

Таким образом были получены по методу Lehmann-Filhès 3 системы элементов орбиты.

	1912.07	1912.40	1930.32
A	43.8 км.	44.5	45.1
B	43.0 »	43.5	43.7
γ	+ 11.2 »	+ 7.5	+ 0.7
u_1	90°32′	90°40′	91°48′
u_2	269 28	269 20	268 12
ω	78 2	76 35	50 47
e	0.044	0.049	0.025
T_π	$2^d.77$	2.72	2.60
a sin i	$1.71 \cdot 10^6$ км	$1.73 \cdot 10^9$	$1.75 \cdot 10^6$

По этим элементам была вычислена эфемерида, сравнение которой со значениями скоростей, измеренными по кривой, приведено в таблице 5.

А. А. Белопольским при обработке собранного им по Алголю чрезвычайно богатого материала (несколько сотен спектрограмм) найдена эмпирическая формула, определяющая изменения γ

$$\gamma = + 4.4 + 8.14 \sin 207^\circ.4 . (t - 1888,88)$$

Сравнение моих определений γ с вычисленными по этой формуле приведены ниже.

	1912.07	1912.40	1930.32
γ (вычисл.)	+ 10.7 км	+ 1.9 км	— 1.4 км
γ (измер.)	+ 11.2 »	+ 7.5 »	+ 0.7 »
$\gamma_в - \gamma_n$	— 0.5 »	— 5.6 »	— 2.1 »

Значение γ, определенное по наблюдениям 1912.40 г., наименее надежное в виду того, что при этом использовались спектрограммы, разделенные промежутком времени более полугода, а период изменения γ составляет 1.7 года. Среднее из крайних значений разности $\gamma_b - \gamma_n$ является, повидимому, приведением моих измерений на измерения А. А. Белопольского.

В заключение считаю необходимым выразить глубокую благодарность А. А. Белопольскому за предоставление материала и руководство моей работой.

Ростов на Дону, апрель 1932 г.

Таблица 1

1912 г.

№№	Ср. Грин. вр.	$t - T_0$	v	$v_0 + v_a$	V
1	Января 5.332	1.697	+ 94.1	— 49.7	+ 44.4
2	» 9.197	2.695	+ 76.2	— 50.9	+ 25.3
3	» 9.231	2 72	+ 81.6	— 50.9	+ 30.7
4	» 16.217	1.162	+ 33.5	— 52.8	— 19.3
5	» 26.199	2.542	+ 104.4	— 54.8	+ 49.6
6	» 27.197	0.673	+ 27.5	— 55.0	— 27.5
7	» 30.200	0.808	+ 24.9	— 55.4	— 30.5
8	Февраля 13.213	0.485	+ 22.0	— 55.8	— 33.8
9	» 19.207	0.744	+ 24.0	— 56.3	— 32.3
10	Октября 23.369	1.315	+ 23.0	— 17.3	+ 5.7
11	» 24.381	2.327	+ 56.1	— 17.8	+ 38.3
12	» 25.376	0.455	— 21.6	— 18.2	— 39.8
13	» 26.370	1.449	+ 22.0	— 18.6	+ 3.4
14	Ноября 6.397	1.007	+ 18.0	— 23.7	— 5.7
15	» 14.375	0.383	— 13.2	— 27.6	— 40.8
16	» 14.415	0.423	— 9.7	— 27.6	— 37.3

Таблица 2

1930 г.

№№	Ср. Грин. вр.		$t - T_0$	v	$v_0 + v_a$	V
1	Февраля	3.219	2.252	+ 93.6	— 55.9	+ 37.7
2	»	4.220	0.385	+ 14.0	— 56.0	— 42.0
3	Марта	4.312	2.671	+ 59.8	— 54.9	+ 4.9
4	»	6.219	1.711	+ 88.2	— 54.6	+ 33.6
5	»	16.223	0.244	+ 31.0	— 52.5	— 21.5
6	»	17.219	1.240	+ 36.2	— 52.2	— 16.0
7	»	22.235	0.523	+ 13.0	— 50.9	— 37.9
8	»	26.212	1.643	+ 66.0	— 49.7	+ 16.3
9	»	30.243	2.797	+ 80.9	— 48.4	+ 32.5
10	Декабря	13.325	2.821	+ 64.6	— 41.0	+ 23.6
11	»	15.353	1.982	+ 91.7	— 41.9	+ 49.8

Таблица 3

Нормальные скорости
1912.40

№№	$t - T_0$	V	NN
1	0.436	— 37.9	8, 12, 15, 16
2	0.742	— 30.1	6, 7, 9
3	1.084	— 12.5	4, 14
4	1.315	+ 5.7	10
5	1.449	+ 3.4	13
6	1.697	+ 44.4	1
7	2.434	+ 44.0	5, 11
8	2.712	+ 28.0	2, 3

Таблица 4

Нормальные скорости
1912.07

№№	$t - T_0$	V	NN
1	0.485	— 33.8	8
2	0.742	— 30.1	6, 7, 9
3	1.162	— 19.3	4
4	1.697	+ 44.4	1
5	2.542	+ 49.6	5
6	2.712	+ 28.0	2, 3

Таблица 5

1912.40 г.

$t - T_0$	v вычисл.	v по кривой	$O - C$
^{d}	+ 2.6	+ 0.5	— 2.1
0.5	— 34.2	— 35.0	— 0.8
1.0	— 23.8	— 25.0	— 1.2
1.5	+ 16.4	+ 17.0	+ 0.6
2.0	+ 49.5	+ 51.0	+ 1.5
2.5	+ 38 5	+ 41.0	+ 2.5

1930.32 г.

$t - T_0$	v вычисл.	v по кривой	$O - C$
0^d	+ 4.6	+ 4.0	— 0.6
0.5	— 37.0	— 40.0	— 3.0
1.0	— 36.7	— 36.5	— 0.2
1.5	+ 2.0	+ 4.5	+ 2.5
2.0	+ 40.8	+ 43.0	+ 2.2
2.5	+ 36.7	+ 36.0	— 0.7

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1933
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles | Отделение математических и естественных наук

КОЛЕБАНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИНОК, НАГРУЖЕННЫХ СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ НАГРУЗКАМИ

А. П. ФИЛИППОВА

(*Представлено академиком* А. Н. Крыловым)

Предположим, что прямоугольная пластинка ограничена контуром

$$x=0,\ x=a,\ y=0,\ y=b$$

и нагружена местными нагрузками, распределенными по прямым

$$y=d_1,\ d_2 \ldots d_m.$$

Края пластинки $x=0$, $x=a$ предполагаются опертыми, края $y=0$, $y=b$ закрепленными любым образом.

Перемещение $u(x, y, t)$ в направлении вертикальной оси, перпендикулярной плоскости пластинки, должно удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}+\frac{q}{gD}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{D}F(x,y,t) \tag{1}$$

где

$$D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

E — модуль упругости материала, h — толщина пластинки, ν — коэффициент Пуассона, q — вес пластинки и $F(x, y, t)$ — внешняя сила, отнесенные к единице поверхности.

Для простоты рассуждений рассматривается сперва нагрузка, распределенная по одной прямой $y=d_1$.

Выделим элемент пластинки в пределах от $y=d_1$, до $y=d_1+\sigma$ и предположим, что пластинка в этих пределах загружена распределенной нагрузкой интенсивностью $q_1(x, y)$ на единицу поверхности.*

* В дальнейшем переход к сосредоточенным нагрузкам будет выполнен аналогично методу, указанному акад. А. Н. Крыловым («О расчете балок на упругом основании», изд. 2, 1931), при котором нет надобности составлять условия сопряжения в местах разрыва нагрузок.

Предположим, что действующая нагрузка q_1 в пределах выделенного элементарного прямоугольника меняется в направлении y'ов по закону прямоугольника, и $F(x, y, t)$ на всем протяжении $d_1 \leqq y \leqq d_1 + \sigma$ равна силам инерции нагрузки для $y = d_1$, т. е.:

$$F(x, y, t) = -\frac{q_1(x, d_1)}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

для

$$d_1 \leqq y \leqq d_1 + \sigma.$$

В остальной области

$$F(x, y, t) = 0,$$

для

$$0 \leqq y \leqq d_1, \ d_1 + \sigma \leqq y \leqq b.$$

Разыскивая решение ур-ния (1) в форме

$$u = (A \cos kt + B \sin kt) w,$$

где w функция x, y и беря вместо x, y переменные

$$x = a\xi, \ y = a\eta,$$

получим для определения w уравнение

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} - \beta^2 w = \frac{\beta^2}{q} f(\xi, \eta), \tag{2}$$

где

$$\beta^2 = \frac{a^4 q k^2}{gD},$$

$$f(\xi, h) = \begin{cases} 0, \text{ для } 0 \leqq \eta \leqq \eta_1, \ \eta_1 + \sigma_1 \leqq \eta \leqq \mu, \\ q_1 w(\xi, \eta), \text{ для } \eta_1 \leqq \eta \leqq \eta_1 + \sigma_1, \end{cases} \tag{3}$$

причем

$$a\eta_1 = d_1, \ \sigma_1 a = \sigma, \ \mu = \frac{b}{a}.$$

Так как пластинка по условию оперта по краям $x = 0$, $x = a$, то должно быть

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0,$$

для

$$x = 0 \quad \text{и} \quad x = a.$$

Поэтому решение уравнения ищет в виде

(4) $$w = \sum_n \nu_n(\eta) \sin n\pi\xi$$

Подставляя (4) в уравнение (2), умножая обе части его на $\sin n\pi\xi$ и интегрируя от 0 до 1, получим

(5) $$V_n^{IV} - 2n^2\pi^2 V_n'' + (n^4\pi^4 - \beta^2) V_n = \varphi(\eta),$$

где

(6) $$\varphi(\eta) = \frac{2\beta^2}{q} \int_0^1 f(\xi, \eta) \sin n\pi\xi d\xi.$$

В символической форме ур-ние (5) будет,

$$V_n = F^{-1}(p)\varphi(\eta),$$

где

$$F(p) = p^4 - 2n^2\pi^2 p^2 + (n^4\pi^4 - \beta^2).$$

Корни характеристического уравнения

$$s_{1n} = -s_{3n} = \sqrt{n^2\pi^2 - \beta}, \quad s_{2n} = -s_{4n} = \sqrt{n^2\pi^2 + \beta}.$$

Разлагая рациональную дробь $F^{-1}(p)$ на простейшие, имеем

(7) $$V_n = \sum_i \frac{a_i \varphi(\eta)}{p - s_{in}} = \sum_i \frac{\varphi(\eta)}{F'(s_{in})(p - s_{in})}$$

где

$$F'(s_{in}) = 4s_{in}(s_{in}^2 - n^2\pi^2).$$

Принимая во внимание, что символ $(p - s)^{-1}\varphi(\eta)$ соответствует уравнению

$$z' - sz = \varphi(\eta)$$

из (7), при условии, что

$$V_n(0) = 0, \; V_n'(0) = 0, \; V_n''(0) = 0, \; V_n'''(0) = 0,$$

имеем частное решение ур-ния (5) с правой частью

(8) $$\Phi_n(\eta) = \int_0^\eta \varphi(t) \sum_{i=1}^4 \frac{e^{s_{in}(\eta - t)}}{F'(s_{in})} dt$$

Что $\Phi_n(\eta)$ есть частное решение уравнения (5) с правой частью, легко проверяется путем дифференцирования $\Phi_n(\eta)$ по параметру η, принимая во внимание соотношения Эйлера

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{s_{in}}{F'(s_{in})} = \begin{cases} 0, \text{ для } j = 0, 1, 2, \\ 1, \text{ для } j = 3. \end{cases}$$

Решение уравнения (5) без правой части ($s_{1n} = -s_{3n}$, $s_{2n} = -s_{4n}$):

(9) $$Y_n(\eta) = A_n \operatorname{sh} s_{in} \eta + B_n \operatorname{ch} s_{1n} \eta + C_n \operatorname{sh} s_{2n} \eta + D_n \operatorname{ch} s_{2n} \eta.$$

Пользуясь правилом Коши, или путем непосредственных вычислений, можно выражение (9) представить также в виде

(10) $$Y_n = A_n Y_{0n} + B_n Y_{1n} + C_n Y_{2n} + D_n Y_{3n},$$

где каждое из частных решений Y_{in} $(i = 0, 1, 2, 3)$ удовлетворяет условиям $(Y_{in}^{(0)} = Y_{in})$

$$Y_{in}^{(r)} = \begin{cases} 0, \text{ для } r \neq i \\ 1, \text{ для } r = i \end{cases} (r = 0, 1, 2, 3)$$

Значения Y_{in} будут:

(11)
$$Y_{0n} = \frac{1}{2\beta}(s_{2n}^2 \operatorname{ch} s_{1n}\eta - s_{1n}^2 \operatorname{ch} s_{2n}\eta),$$
$$Y_{1n} = \frac{1}{2\beta}\left(\frac{s_{2n}^2}{s_{1n}} \operatorname{sh} s_{1n}\eta - \frac{s_{1n}^2}{s_{2n}} \operatorname{sh} s_{2n}\eta\right),$$
$$Y_{2n} = \frac{1}{2\beta}(\operatorname{ch} s_{2n}\eta - \operatorname{ch} s_{1n}\eta),$$
$$Y_{3n} = \frac{1}{2\beta}\left(\frac{1}{s_{2n}} \operatorname{sh} s_{2n}\eta - \frac{1}{s_{1n}} \operatorname{sh} s_{1n}\eta\right).$$

Частное решение ур-ния (8) с правой частью будет

(12) $$\Phi_n(\eta) = \int_0^\eta \varphi(t)\, Y_{3n}(\eta - t)\, dt.$$

Принимая во внимание значение $\varphi(t)$ (6), имеем

(13) $$\Phi_n(\eta) = \frac{2\beta^2}{q} \int_0^1 \sin n\pi\, \xi d\xi \int_0^\eta f(\zeta, t)\, Y_{3n}(\eta - t)\, dt$$

причем согласно (3) $\Phi_n(\eta)$ обращается в нуль для $0 \leqq \eta \leqq \eta_1$, а для

$$\eta_1 + \sigma_1 \leqq \eta \leqq \mu$$

$$\Phi_n(h) = \frac{2\beta^2}{q} \int_0^1 \sin n\pi\, \xi d\xi \int_{+\eta_1}^{\eta^1 + \sigma_1} q_1 w(\xi,\ t)\, Y_{3n}(\eta - t)\, dt$$

В пределе, когда $\sigma \longrightarrow 0$, $q_1 \sigma \longrightarrow p_1$ или $q_1 \sigma_1 a \longrightarrow p_1$, где p_1 интенсивность нагрузки на единицу длины, распределенной по прямой $y = d_1$; для $\eta \geqq \eta_1$

$$\Phi_n(\eta) = \frac{2\beta^2}{aq} \int_0^1 p_1\, Y_{3n}(\eta - \eta_1)\, w(\xi,\ \eta_1) \sin n\pi\xi d\xi, \tag{14}$$

где

$$w(\xi,\ \eta_1) = \sum_i \left[A_i\, Y_{0i}(\eta_1) + B_i\, Y_{1i}(\eta_1) + C_i\, Y_{2i}(\eta_1) + D_i\, Y_{3i}(\eta_1)\right] \sin i\pi\xi$$

Это следует из того, что

$$\int_{\eta_1}^{\eta_1+\sigma_1} q_1 w(\xi,\ t)\, Y_{3n}(\eta - t)\, dt = \int_{\eta_1}^{\eta_1+\sigma_1} q_1\, Y_{3n}(t) \sum_n Y_n(t) \sin n\pi\xi dt +$$
$$+ \int_{\eta_1}^{\eta_1+\sigma_1} q_1\, Y_{3n}(\eta - t) \sum_n \Phi_n(t) \sin n\pi\xi\, dt,$$

а второй интеграл для $\eta \leqq t \leqq \eta_1 + \sigma_1$, как нетрудно заключить согласно значений Φ_n по форм. (12), будем стремиться к нулю, когда

$$\sigma_1 \longrightarrow 0 \left(q_1 \sigma_1 \longrightarrow \frac{p_1}{a}\right).$$

Последовательные производные функции $\Phi_n(\eta)$ (12) по η будет*

$$\Phi_n'(\eta) = \int_0^\eta \varphi(t)\, Y_{2n}(\eta - t)\, dt, \quad \Phi_n''(\eta) = \int_0^\eta \varphi(t)\, Y_{2n}'(\eta - t)\, dt,$$

$$\Phi_n'''(\eta) = \int_0^\eta \varphi(t)\, Y_{0n}(\eta - t)\, dt,$$

* Согласно (6) функция $\varphi(\eta)$ везде равна нулю за исключением $\eta_1 \leqq \eta \leqq \eta_1 + \sigma_1$; здесь q_1 в зависимости от η меняется по закону «прямоугольника», значения производных функции (12) по η справедливы и для этого случая, что легко доказывается (см. А. Н. Крылов. «О расчете балок», § 10).

так как

$$Y_{3n}(0)=0,\ \ Y_{2n}(0)=0,\ \ Y_{2n}'(0)=0.$$

Общее решение ур-ния (2)

$$w(\xi,\eta)=\sum_n\{Y_n(\eta)+\Phi_n(\eta)\}\sin n\pi\xi \tag{15}$$

В частности, когда груз P сосредоточен в одной точке

$$x=c_1,\ \ y=d_1\,(\xi=\xi_1,\ \ \eta=\eta_1),$$

то, рассматривая его как предельное положение нагрузки, распределенной по прямоугольнику в пределах от $x=c_1$ до $x=c_1+\sigma_2$ (от $\xi=\xi_1$ до

$$\xi=\xi_1+\sigma_2')$$

в предположении, что $p\sigma_2\to P\,(p\sigma_2'a\to P)$, когда $\sigma_2\to 0$, получим

$$\Phi_n(h)=\begin{cases}0,\ \text{для}\ \ 0\leqq\eta\leqq\eta_1\\ \dfrac{2P\beta^2}{a^2q}\sin n\pi\xi_1\,Y_{3n}(\eta-\eta_1)\sum\limits_i Y_i(\eta_1)\sin i\pi\xi_1,\quad \text{для}\quad \eta\geqq\eta_1.\end{cases} \tag{16}$$

Когда имеется ряд нагрузок, распределенных по прямым

$$\eta=\eta_1,\ \ \eta_2\ldots\eta_m,$$

то необходимо вместо $\Phi_n(\eta)$ в общем решении (15) написать сумму выражений, аналогичных (14) или (16) для всех значений η от η_1 до η_m.

Так в частности, когда грузы $P_1\ldots P_k\ldots P_m$ приложены в точках

$$\xi_1,\ \eta_1,\ldots\xi_m,\ \eta_m$$

имеем для интервала $\eta_k\leqq\eta\leqq\eta_{k+1}$

$$w(\xi,\eta)=\sum_n\sum_i^{1,k}\left[Y_n(\eta)+\frac{2\beta^2P_i}{a^2q}\sin n\pi\xi i\,Y_{3n}(\eta-\eta_i)\,w(\xi_i,\eta_i)\right]\sin n\pi\xi.$$

Беря частное решение в зависимости от условий закрепления края $y=0$, а именно

$B_n\ Y_{1n}+D_n\,Y_{3n}$ — для опертого края, когда $0\leqq\eta\leqq\eta_1$
$C_n\ Y_{2n}+D_n\,Y_{3n}$ — для закрепленного края, » »
$A_n(Y_{0n}+n^2\pi^2\nu Y_{2n})+B_n(Y_{1n}+(2-\nu)n^2\pi^2\,Y_{3n})$ — для свободного края, когда $0\leqq\eta\leqq\eta_1$

и удовлетворяя два условия для $y = b\,(\eta = \mu)$ для каждого из коэффициентов при $\sin n\pi\xi$ в выражении (15), получим систему $\underset{n\to\infty}{2n}$ однородных уравнений относительно произвольных постоянных и из условия совместности, приравнивая нулю определитель, составленный из коэффициентов при них, получим трансцендентное уравнение относительно β, из которого найдем ряд значений $\beta - \beta_0, \beta_1 \ldots$, а следовательно и частоты колебаний

$$\frac{k}{2\pi} = \frac{\beta}{2\pi a^2}\sqrt{\frac{gD}{q}}.$$

Возьмем для примера пластинку, нагруженную в точке

$$x = \frac{a}{2}, \quad y = \frac{b}{2}\left(\xi = \frac{1}{2}, \quad \eta = \frac{\mu}{2}\right)$$

грузом

$$P\left(\frac{P}{qab} = c^3\right)$$

Стороны $y = 0$, $y = b\,(\eta = 0,\ \eta = \mu)$ обе закреплены или оперты. Для закрепленных концов решение берем для $0 \leqq \eta \leqq \eta_1$

$$Y_n = \frac{C_n}{Y_{2n}\left(\frac{\mu}{2}\right)} Y_{2n}(\eta) + \frac{D_n}{Y_{3n}\left(\frac{\mu}{3}\right)} Y_{3n}(\eta) \tag{17}$$

Удовлетворяя условия $w = 0$, $\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0$ при $y = b$ для решения (15) и принимая во внимание, что для случая нагрузки, приложенной в точке

$$x = \frac{a}{2}, \quad y = \frac{b}{2}$$

для колебаний, не имеющих узловыми линиями прямой $x = \dfrac{a}{2}$; останутся лишь коэффициенты при $\sin n\pi\xi$ для $n = 1, 3, 5 \ldots$, получим из условия совместности уравнений для определении частоты колебаний трансцендентное уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & -1 & -1 & 1 & 1 & \ldots \\ b_{11} & b_{12} & -1 & -1 & 1 & 1 & \ldots \\ 1 & 1 & a_{33} & a_{34} & 1 & 1 & \ldots \\ 1 & 1 & b_{33} & b_{34} & 1 & 1 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = 0, \tag{18}$$

где

$$b_{nk}=\frac{Y_{in}'(\mu)}{2Y_{in}\left(\frac{\mu}{2}\right)Y_{3n}'\left(\frac{\mu}{2}\right)}+\mu c^2\beta^2\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$a_{nk}=\frac{Y_{in}(\mu)}{2Y_{in}\left(\frac{\mu}{2}\right)Y_{3n}\left(\frac{\mu}{2}\right)}+\mu c^2\beta^2\sin\frac{n\pi}{2}$$

причем для

$$k=n,\ i=2;\ k=n+1,\ i=3.$$

Аналогичный определитель получается и для опертых концов, необходимо только вместо функций Y_{2n} и Y_{3n} в (17) взять

$$Y_{1n} \text{ и } Y_{3n} \text{ (или } \operatorname{sh} s_{1n},\ \operatorname{sh} s_{2n} h).$$

В частности, ограничиваясь определителем, составленным из первых двух строчек и двух колонн, получим, напр., для опертых концов уравнение

$$\begin{gathered}2\operatorname{ch}\frac{s_{11}\mu}{2}\operatorname{ch}\frac{s_{21}\mu}{2}+c^2\beta\mu\left[\left(s_{21}^2\operatorname{ch}\frac{s_{21}\mu}{2}-s_{11}^2\operatorname{ch}\frac{s_{11}\mu}{2}\right)Y_{31}\left(\frac{\mu}{2}\right)+\right.\\ \left.+\left(\operatorname{ch}\frac{s_{11}\mu}{2}-\operatorname{ch}\frac{s_{21}\mu}{2}\right)Y_{31}''\left(\frac{\mu}{2}\right)\right]=0.\end{gathered} \tag{19}$$

Производя вычисления для опертых концов для квадратной пластинки, для частного случая, когда $P=qa^2 (c^2=1,\ \mu=1)$ получим для наименьшего корня уравнения значение

$$\beta_0=8.704.$$

Аналогично для закрепленных краев $y=0$, $y=b$, $\beta_0'=11.382$.

Если взять трансцендентное уравнение при четырех строчках и колоннах, то на написанные выше значения β_0, β_0' поправка влияния не окажет, так, для опертых концов она будет порядка $0.97\cdot 10^{-5}$.

Вычисления произведем следующим образом. Из уравнения для определения частоты при опертых краях (19) приближенное значение для наименьшего корня

$$\beta_0=8.70.$$

Следовательно

$$s_{11}=1.0815,\ s_{21}=4.3092$$

$$\operatorname{ch}\frac{s_{11}}{2}=1.14983,\quad \operatorname{sh}\frac{s_1}{2}=0.56755,\quad \operatorname{ch}\frac{s_{21}}{2}=4.37014,$$

$$\operatorname{sh}\frac{S_{21}}{2}=4.25424.$$

Полагая

$$\beta_0' = \beta_0 + 2\varepsilon s_{11}, \quad s_{11}' = s_{11} - \varepsilon, \quad s_{21}' = s_{21} + \varepsilon \frac{s_{11}}{s_{21}}.$$

и принимая для $\operatorname{ch} \frac{s_{11}'}{2}$, $\operatorname{ch} \frac{s_{21}'}{2} \ldots$, значения

$$\operatorname{ch} \frac{s_{11}'}{2} = \operatorname{ch} \frac{s_{11}}{2} - \varepsilon \operatorname{sh} \frac{s_{11}}{2}, \quad \operatorname{ch} \frac{s_{21}'}{2} = \operatorname{ch} \frac{s_{21}}{2} + \varepsilon \frac{s_{11}}{S_{21}} \operatorname{sh} \frac{s_{21}}{2}.$$

Получим после подставки в ур-ние (19)

$$\varepsilon = \frac{0.0277}{15.357} = 0.001805,$$

$$\beta_0' = \beta_0 + 2\varepsilon s_{11} = 8.7039.$$

Определитель при четырех строчках и колоннах

$$(a_{11} b_{12} - b_{11} a_{12})(a_{33} b_{34} - b_{33} a_{34}) + (a_{11} - a_{12} + b_{12} - b_{11})(b_{33} - b_{34} + \\ + a_{34} - a_{33}) = 0;$$

Беря для s_{11}, s_{21}, s_{13}, s_{23} значения согласно $\beta = 8.70$ получим, после подставки соответствующих значений a_{33}, $b_{33} \ldots$, что измененное значение корня β_0 определится из уравнения

$$(a) \qquad Y_{31}\left(\frac{1}{2}\right) Y_{31}''\left(\frac{1}{2}\right)(a_{11} b_{12} - b_{11} a_{12}) = \frac{0.358}{\beta^4} = 0.0000692,$$

где в уравнении (a) левая часть соответствует выражению

$$2 \operatorname{ch} \frac{s_{11}}{2} \operatorname{ch} \frac{s_{21}}{2} + \beta \left[\left(\operatorname{ch} \frac{s_{11}}{2} - \operatorname{ch} \frac{s_{21}}{2} \right) Y_{31}''\left(\frac{1}{2}\right) + \\ + \left(s_{21}^2 \operatorname{ch} \frac{s_{21}}{2} - s_{11}^2 \operatorname{ch} \frac{s_{11}}{2} \right) Y_{31}\left(\frac{1}{2}\right) \right].$$

Следовательно поправка для $\beta_0' = 8.7039$

$$2\varepsilon s_1 = \frac{0.0000692}{15.357} \cdot 2 \cdot 1.0815 = 0.0000097.$$

Аналогичным образом вычисления были проведены и для пластинки с двумя закрепленными краями.

Если воспользоваться для рассматриваемой квадратной пластинки методом Rayleigh'я, то беря для опертой пластинки уравнение поверхности

$$\xi = f \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}$$

для закрепленной

$$\xi = f\left(1 - \cos\frac{2\pi x}{a}\right)\sin\frac{\pi y}{a},$$

получим найбольшую потенциальную энергию соответственно для 1 и 2 случая ($f = \cos kt$)

$$V_1 = \frac{\pi^4 D}{2a^2}, \quad V_2 = \frac{\pi^4 D}{a^2}\frac{27}{8},$$

Кинетическую

$$\left(c^2 = \frac{P}{qa^2}\right)$$

$$T_1 = \frac{qa^2}{2g}\left(\frac{1}{4} + c^2\right)k_1^2, \quad T_2 = \frac{qa^2}{8}(3 + 16c^2)k_2^2;$$

для $c = 1$

$$k_1 = \frac{2\pi^2}{a^2\sqrt{5}}\sqrt{\frac{gD}{q}}$$

для опертых концов,

$$k_2 = \frac{\pi^2}{a^2}\sqrt{\frac{27}{19}}\sqrt{\frac{gD}{q}}$$

для закрепленных, т. е.

$$\beta_0 = 8.83$$

отличается от точного 8.704 на $1^1/_2\%$;

$$\beta_0' = 11.76$$

отличается от точного 11.382 на 3.3%.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1933
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

К ТЕОРИИ ГЕТЕРОГЕННОГО КАТАЛИЗА

Л. В. ПИСАРЖЕВСКОГО

Еще в 1923 г. я высказал предположение, что способность металла быть катализатором процессов в газообразной среде должна зависеть, в первую очередь: 1) от его способности адсорбировать газы и 2) от степени диссоциации его атомов на ионы и электроны.[1]

Я считал тогда действие катализатора-металла комбинированным действием адсорбции и механических ударов его электронов.[2]

Первоначальное ориентировочное представление о катализе как о механическом действии электронов металла, в ходе работ, возникших на его почве в моей лаборатории, постепенно изменялось, дополнялось и детализировалось.[3]

На основании этих работ я вскоре пришел к выводу, что «механическое действие свободных электронов металла, несомненно, комбинируется с действием их как электрических зарядов»[4] и попытался в 1929 г. набросать схему механизма катализа платиной процесса образования воды из кислорода и водорода.[5]

В этой схеме превалирующее значение отдано уже химическому действию электронов катализатора, основанному на сродстве их к атомам кислорода, т. е. не механическому их действию, но действию электрических их зарядов.[6]

В настоящей статье предлагается дальнейшее развитие этой схемы и моих взглядов на механизм катализа металлами газовых реакций.

[1] Монография: «Электрон в химии растворов и в электрохимии». Гос. изд. Укр., 1923 г., стр. 116 и Укр. Хим. журн., 1925, т. I, стр. 1.

[2] L. c. и «К вопросу о механизме катализа металлами и металлическими окислами» Журн. РФХО, 1929, т. LXI, стр. 1611.

[3] L. c., стр. 1609.

[4] Журн. РФХО, 1929, стр. 1613.

[5] L. c., стр. 1613—1616.

[6] Ibid.

Диссоциация атомов металла на ионы и электроны и существование в результате ее свободных электронов в металле — должны сказываться на особенностях механизма катализа металлами.

То или иное действие свободных электронов металла, очевидно, комбинируется с действием зарядов его ионов, поляризующим неполярные молекулы, увеличивающим степень полярности полярных молекул, адсорбирующим, способствующим ионизации адсорбированных молекул и атомов, удерживающим при химической сорбции отрицательные ионы на поверхности металла.

Ответ на вопрос о возможности механического действия свободных электронов металла на адсорбированые его поверхностью молекулы мы находим в электронной теории металлов А. Зоммерфельда (1928 г.).

Металл представляет собою решетку положительных ионов, заключающую внутри себя свободно движущиеся электроны, — «электронный газ». «Внутри металла положительно заряженные ионы в среднем нейтрализуются свободными отрицательно заряженными электронами. При выходе электрона из металлической решетки на него действует притяжение положительных ионов, с наружной стороны уже не нейтрализованных, и выйти удается только тем электронам, скорость коих превосходит ту, которой электрон должен обладать в перпендикулярном к поверхности металла направлении, чтобы пройти через поверхность».

Средняя скорость движения свободных электронов внутри металла, по Зоммерфельду, «имеет порядок величины (смотря по числу свободных электронов в единице объема) около 1000 км/сек.»

Кинетическая энергия движения в больших кал. при такой скорости равна 65 б. кал. А чтобы вырвать электрон из платины, надо затратить, как показывает опыт, около 100 б. кал. работы, причем вырванный электрон будет обладать кинетической энергией, равной нулю.

Отсюда ясно, что сами по себе будут выходить из решетки платины лишь электроны, скорость которых значительно превосходит среднюю скорость. По Зоммерфельду их будет очень немного. Таким образом, их механическое действие не приходится принимать в расчет, как один из факторов каталитического действия поверхности металлов.

Если же какое-либо вещество, как, например водород, способно проникать внутрь металла, то здесь может иметь место и механическое действие электронов, обладающих внутри металла достаточной кинетической энергией и большой длиной свободного пути (Фаулер, основываясь на волновой механике, доказывает, что электроны свободно движутся через ненарушенную

кристаллическую решетку в металле на расстояния, в сотни раз превышающие расстояния между ионами металла).

Надо отметить все же следующее. По теории «электронного газа» Ричардсона средняя скорость движения свободных электронов внутри металла вычислялась равной 118 км в секунду.

Зоммерфельд в своей теории дает почти в 10 раз большую среднюю скорость.

Никто не станет утверждать, что этим средняя скорость движения электронов внутри металла раз навсегда установлена. При дальнейшем развитии электронной теории металлов она может оказаться настолько больше, что значительная часть электронов окажется способной выходить на поверхность металла с таким запасом кинетической энергии, которого будет достаточно для того, чтобы механическое действие электронов на адсорбированные поверхностью металла молекулы стало одним из факторов его каталитической активности.

В данный же момент мы можем говорить о наличии и механического действия электронов лишь на проникшие внутрь металла молекулы или атомы катализируемых им веществ.

Мы говорим здесь о катализе при обыкновенной температуре.

При высоких температурах, конечно, вполне вероятно и механическое действие свободных электронов металла-катализатора; это должно наблюдаться при тех температурах, при которых вылетающие из катализатора электроны обладают достаточной для механического действия кинетической энергией.

Ришкевич указал в 1929 г. на то, что —

... существует целый ряд гетерогенных газовых реакций, при которых каталитическое действие твердых поверхностей вряд ли связано с адсорбцией. Это реакции при очень высоких температурах, — между 1500—2000.°

... известно, что все твердые вещества при высоких температурах испускают электроны.

«Die Anregung der Reaktionsteilnehmer durch diese Elektronen wäre eine Erklärung der Ursache der katalytischen Wirkung der festen Wand bei der Oberflächenverbrennung...»[1]

В указанных Ришкевичем случаях вылетающие из катализатора электроны должны действовать и механически и своими зарядами.

[1] Ryschkewitsch. Z. f. Elektroch. (Diskussion), 35 (1929), 585.

В рассматриваемом нами случае, когда катализ идет при обыкновенной температуре, на первый план выступает действие электронов катализатора-металла на адсорбированные им молекулы как электрически заряженных частичек.

Если на поверхности металла есть молекулы, с которыми выходящие на поверхность электроны могут легко вступать во взаимодействие, образуя отрицательные ионы, то они будут это делать.

Так, например, при встрече с молекулами O_2 они должны давать ионы O' (см. ниже).

Молекулы кислорода будут, кроме того, вытягивать из металла и те свободные электроны, которые не в состоянии сами выйти на поверхность.

Зоммерфельд говорит: «в наэлектризованной решетке, в которой замкнуты электроны, имеются маленькие отверстия. Если электроны сильно «отсасывать» снаружи (при помощи электрического поля), то они могут в значительном количестве выходить наружу под совместным действием внешнего отсасывания и внутреннего своего давления».

Молекулы кислорода должны, как увидим ниже, «отсасывать» электроны металла.

Рассмотрим теперь схему механизма катализа платиной процесса образования воды из водорода и кислорода.

Кен[1] показал, что при пропускании тока через насыщенную водородом палладиевую проволоку водород идет к отрицательному полюсу.

Это служит прямым доказательством того, что растворенный в палладии водород диссоциирован на ионы и электроны.

Академиком А. Фрумкиным показано,[2] «что насыщенная водородом платиновая чернь посылает в нейтральный раствор электролита ионы водорода, причем заряжается отрицательно и притягивает из раствора катионы, так что первоначально нейтральный раствор становится кислым».

Это прямое доказательство диссоциации поглощенных платиной молекул водорода, в конечном счете, на протоны и электроны:

$$H_2 \leftrightarrows 2H^{\cdot} + 2e$$

[1] Alfred Coehn. Nachweis von Protonen in Metallen. Z. f. Elektroch., 35 (1929), 676.

[2] A. Frumkin. Über die Adsorption von Elektrolyten durch aktivierte Kohle. Kolloid-Zeitschr., 51 (1930), 123.

Существование же диссоциации атомов платины на ионы и электроны дает здесь более сложное состояние равновесия:

$$\begin{array}{lll} & 2H^{\cdot} & \\ H_2 \rightleftarrows & + & \\ & 2e & \\ & + \rightleftarrows & Pt \\ & Pt^{\cdot\cdot} & \end{array}$$

Да и самый факт существования водородного электрода указывает на существование диссоциации на протоны и электроны водорода, поглощенного, скажем, платиной:

$$\begin{array}{lll} & 2e & \\ H_2 \rightleftarrows & + & \\ & 2H^{\cdot} & \\ & + \rightleftarrows & 2H^{\cdot}.aq \\ & aq & \end{array}$$

Значительная интенсивность этого процесса ионизации поглощенного металлом водорода доказывается опытами А. Фрумкина[1] и С. Васильева над «отравлением сулемой процесса образования ионов водорода на платинированном угле».

«Если насытить платинированный уголь водородом, затем прилить отравитель и, наконец, щелочь, то последняя заметно адсорбируется даже при количествах сулемы = 10 (10 атомов ртути в растворе на один атом платины в угле)».

Количественное изучение этого процесса показало, что около половины щелочи адсорбируется «за счет вновь образующихся ионов водорода и что, следовательно, добавление сулемы не может полностью остановить ионизацию водорода на платиновых центрах угля»...

В предыдущей статье, посвященной вопросу о механизме катализа металлами и металлическими окислами,[2] мною было показано путем соответствующих подсчетов, что металл является хорошим водородным катализатором, если промежутки между оболочками его ионов достаточно велики, чтобы дать возможность молекулам водорода проникнуть внутрь металла. Внутри металла действие зарядов ионов и свободных электронов последнего и механическое действие этих его электронов, обладающих в среднем кинетической энергией, равной 65 б. кал. (см. выше), вызывают диссоциацию водорода на протоны и электроны.

[1] Журн. физ. хим., 1930, т. I, вып. 6, стр. 669.

[2] Журн. РФХО, т. 61 (1929), стр. 1630.

Образовавшиеся внутри металла протоны должны сравнительно легко выходить на поверхность металла. И действительно, Р. Зурман показал, что после уничтожения (бомбардировкой электронами) протонов, находящихся на поверхности платины, достаточно нагреть ее несколько секунд в высоком вакууме до 1000°, чтобы находящиеся еще внутри металла протоны вышли на поверхность.[1] Мало того, он показал, что они и без нагревания сами по себе выходят на поверхность, что можно обнаружить уже через несколько часов. Металл обладает, по Зурману, очень сильным стремлением высылать на поверхность находящиеся внутри его протоны.[2] Последние же, выйдя на поверхность, чрезвычайно облегчают выбивание из металла электронов действием ультрафиолетовых излучений.[3]

Они понижают работу выхода электронов на поверхность. Следовательно, и без действия излучений вышедшие на поверхность металла протоны обегчают электронам выход на поверхность. Электронов будет выходить значительно больше, чем из чистого, не поглотившего водорода металла. Химическая активность атомов водорода значительно увеличивается, когда они действуют в виде отделенных уже друг от друга протонов и электронов.

Этим и объясняется большая химическая активность водорода, поглощенного палладием. В этом и состоит активация водорода катализатором-металлом, его адсорбирующим.

Нет, следовательно, необходимости принимать образование поверхностных соединений атомов водорода с металлом-катализатором, облегчающих взаимодействия водорода на поверхности катализатора. Свободные протоны, отдельно и вместе со свободными электронами, гораздо легче должны вступать в реакции, чем связанные, хотя бы и в виде непрочных поверхностных соединений, атомы водорода. Это подтверждают наблюдения: образование гидрида платины PtH_2 на ее поверхности уменьшает ее каталитическую активность при катализе гремучего газа.[4]

Что же касается адсорбированных молекул кислорода, то они, вероятно, образуют поверхностные соединения с платиной.

Во всяком случае, они должны, прежде всего, при соприкосновении с катализатором превратиться в $O' =$ ионы

[1] Physik. Zeitschr., 30 (1929), 939.
[2] Z. f. Elektroch., 35 (1929), 681 и l. c.
[3] Ibidem.
[4] См. мою статью в Журн. РФХО, 61 (1929), 1627.

Это вытекает уже из факта существования кислородного электрода:

$$
\begin{array}{lll}
 & Pt^{\cdot\cdot} & Pt^{\cdot\cdot} \\
Pt \leftrightarrows & + & + \leftrightarrows Pt \\
 & 2e & 2e \\
 & + \leftrightarrows 2O' & + \leftrightarrows 2'O'H^{\cdot}aq \\
 & O_2 & + \leftrightarrows 2O'H^{\cdot}\,aq \\
 & & 2H^{\cdot}\,aq
\end{array}
$$

Это образование кислородного электрода состоит прежде всего в образовании отрицательных ионов каслорода O', которые, так или иначе, могут получить свои электроны в конечном счете только от платины.

А. Фрумкин дает следующую схему поглощения кислоты из раствора углем, заряженным кислородом:[1]

«За счет адсорбированного кислорода получаются гидроксильные ионы, которые идут в раствор, и положительные заряды, которые остаются на поверхности угля... гидроксильные ионы соединяются с водородными ионами раствора, а положительно заряженная поверхность угля притягивает из раствора анионы...»

Для образования гидроксильных ионов каждый атом адсорбированного кислорода должен получить, в конце концов, по два электрона. Очевидно, он берет их от угля.

Прибавление платины к углю (платинирование его) сильно повышает его способность поглощать кислоту в присутствии кислорода.[2] Образование кислородного электрода ($O_2 + 2e \rightarrow 2O'$ и т. д.) идет здесь энергичнее, так как у платины много больше свободных электронов по сравнению с углем.

Указанные явления — прямое доказательство взаимодействия свободных электронов с адсорбированными молекулами кислорода.

Представим себе, что вышедшие на поверхность платины свободные электроны, обладающие равной нулю кинетической энергией (см. выше), встречаются с молекулами кислорода. Взаимодействие этих свободных электронов с молекулами кислорода принадлежит к типу не инертных реакций.[3] В самом деле, изобразим этот процесс так:

[1] A. Frumkin. Über die adsorption von Elektrolyten durch aktivierte Kohle. Kolloid-Zeitschr., 51 (1930), 124.

[2] A. Frumkin, l. c.

[3] M. Polanyi. Betrachtungen über den Aktivierungsvorgang an Grenzflächen. Z. f. Elektroch., 35 (1929), 562.

$$e + OO + e \rightarrow Oe + Oe + 207 \text{ б. кал.}$$ [1]

Это явно реакция типа: $A + BC + Д \rightarrow AB + СД + Q$, типа процессов, активация которых равна нулю и которые поэтому должны легко итти сами по себе.[2]

Если вышедшие на поверхность свободные электроны обладают кинетической энергией большей нуля, то выделение энергии при процессе их взаимодействия с молекулами кислорода будет больше 207 б. кал.

Получаемая при этих подсчетах очень большая величина выделяемой энергии указывает на то, что молекулы кислорода должны вытягивать изнутри металла и те его свободные электроны, которые не в состоянии самостоятельно выйти на поверхность, чему помогает «внутреннее давление» последних (см. выше).

Образовавшиеся указанным путем O'-ионы дают поверхностное соединение с ионами платины. Такое поверхностное соединение есть как бы соединение этих ионов кислорода со всей поверхностью, состоящей из ионов платины, правильнее сказать — с определенными участками этой поверхности, по всей вероятности с активными центрами... Возможно, что на этих участках они ведут себя так, как по дипольной теории адсорбции ведут себя адсорбированные молекулы:[3] они образуют «газ двух измерений» и, колеблясь перпендикулярно к удерживающей их поверхности платины, двигаются вдоль нее, отталкиваясь друг от друга. Как бы там ни было, такое поверхностное соединение не представляет собою окисла платины, — ее твердой кристаллической решетки. Есть такие случаи, когда образуется и последняя. Тогда сейчас же прекращается катализ платиной гремучей смеси ($H_2 + O_2$).[4] Отсюда ясно, что если существует и образуются во время катализа поверхностные соединения платины с кислородом, то каковы бы они ни были, — они, во всяком случае, не являются обычными окислами платины.

Адсорбированный кислород при откачивании насосом, даже при 350°, практически не удаляется с поверхности платины, водород же легко уходит[5]

[1] Тепловой эффект этого процесса вычислен так:

$$\begin{array}{r} O_2 \rightarrow 2O - 117 \\ 2O + 2e \rightarrow 2O + 324 \\ \hline O_2 + 2e \rightarrow 2O + 207 \end{array}$$

Относительно образования в первую очередь O'-ионов см. мою статью, l. c., стр. 1613 и 1614.

[2] M. Polanyi, l. c., стр. 562 и 564.

[3] E. Sauter. Heterogene Katalyse, 1930 г., стр. 41 и 42.

[4] См. мою статью l. c., стр. 1627.

[5] Hugh. S. Taylor. Über aktive Stellen an Katalysatoren. Z. f. Elektroch., 35 (1929), 546.

уже при 250°. Этим подтверждается предположение о существовании поверхностных соединений платины с кислородом и отсутствие подобных соединений для водорода.

Против существования поверхностного соединения платины с водородом говорит и энергетика процесса образования отрицательных ионов водорода из его молекул и свободных электронов:[1]

$$2e + H_2 \rightarrow 2H' - 67.2$$

$$(H_2 \rightarrow 2H - 100 \text{ и } 2e + 2H \rightarrow 2H' + 16.4 \times 2; \text{ в сумме } - 67.2).$$

Процесс этот сопровождается значительным поглощением энергии в противоположность: $2e + O_2 \rightarrow 2O' + 207$, идущему с очень большим выделением энергии.

Находящиеся на поверхности платины O'-ионы (удерживаемые на ней зарядами $Pt^{\smile\smile}$) должны легко соединяться с выходящими на поверхность $H^{\smile}$-ионами, так как процесс: $O' + H^{\smile} \rightarrow O'H^{\smile} + 250$ б. кал.[2] — тип. реакции, идущей без активации (см. выше) и, кроме того, мы знаем, что водород в виде отдельных атомов восстанавливает при обыкновенной температуре даже настоящие окислы таких металлов, как медь, причем атомы водорода отдают свои электроны ионам металла окиси. Тем более легко они это сделают, находясь в состоянии уже отделенных друг от друга протонов и электронов и притом действуя не на обычный окисел, но на значительно менее прочное поверхностное соединение, да еще такого металла, как платина.

Обозначим условно поверхностное соединение платины с ионами O' формулой $Pt^{\smile\smile}_{--}$–O'. Тогда процесс восстановления последнего с образованием поверхностного соединения платины с гидроксильным ионом изобразится так:

$$e + Pt^{\smile\smile}_{---} - O' + H^{\smile} \rightarrow Pt^{\smile\smile}_{--} - O'H^{\smile}$$

[1] При этом подсчете для величины сродства электрона к атому водорода принято число 16. 4 б. кал., вычисленное П. Стародубровским, Z. f. Physik, 65 (1930), 806.

[2] Этот тепловой эффект вычисляется так:

$$\begin{array}{r} 2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O + 57{,}8.2 \\ 2O \rightarrow O_2 + 58{,}5.2 \\ 4H \rightarrow 2H_2 + 100.2 \\ \hline 4H + 2O \rightarrow 2H_2O + 216.2 \text{ б. кал.} \end{array}$$

и

$$\begin{array}{l} 2H + O \rightarrow H_2O + 216 \\ H_2O \rightarrow H + OH - 115 \\ \hline O + H \rightarrow O'H^{\smile} + 101 \\ H^{\smile} + e \rightarrow H + 311 \\ O' \rightarrow O + e - 162 \\ O + H \rightarrow OH + 101 \\ \hline O' + H^{\check{}} \rightarrow O'H^{\check{}} + 250 \text{ б. кал.} \end{array}$$

Присоединение $\mathrm{H}^{\vee}$-иона к O' нейтрализует отрицательный заряд последнего и дает, таким образом, возможность присоединиться к O' второму электрону.[1]

Таким образом, процесс взаимодействия O'-ионов с $\mathrm{H}^{\vee}$ и e сведется к последовательному их соединению сначала с $\mathrm{H}^{\vee}$, потом с e, что они проделают, не отрываясь от поверхности катализатора, причем получается поверхностное соединение платины с ${}'\mathrm{O}'\mathrm{H}^{\vee}$-ионами.

Теперь последним остается только соединиться с $\mathrm{H}^{\vee}$-ионами, чтобы получились молекулы воды. Представим себе этот процесс в виде процесса одновременного действия $\mathrm{H}^{\vee}$ и e, т. е. процесса восстановления

$$\mathrm{e} + \mathrm{Pt}\overset{\vee}{-}\overset{\vee}{-}-{}'\mathrm{O}'\mathrm{H}^{\vee} + \mathrm{H}^{\vee} \rightarrow \mathrm{Pt}^{\vee\vee}\!:\mathrm{e} + \mathrm{H}^{\vee}{}'\mathrm{O}'\mathrm{H}^{\vee}$$

Он должен, как процесс восстановления ($\mathrm{H}^{\vee}$ + e) поверхностного соединения платины $\mathrm{Pt}\overset{\vee}{-}\overset{\vee}{-}-{}'\mathrm{O}'\mathrm{H}^{\vee}$, итти вполне легко (см. выше).

Итак, по только что приведенной схеме катализа платиной гремучего газа катализатор разлагает адсорбированные молекулы водорода, в конечном счете, на протоны и электроны, молекулы же кислорода превращает в O'-ионы, которые образуют поверхностное соединение с платиной: $\mathrm{Pt}\overset{\vee}{-}\overset{\vee}{-}-\mathrm{O}'$. Это соединение, присоединяя к O'-ионам $\mathrm{H}^{\vee}$ и e, легко переходит в поверхностное соединение $\mathrm{Pt}\overset{\vee}{-}\overset{\vee}{-}-{}'\mathrm{O}'\mathrm{H}^{\vee}$, которое с $\mathrm{H}^{\vee}$ и e дает молекулы воды.

Во всяком случае, разложение катализатором-платиной молекул водорода на протоны и электроны следует считать доказанным на опыте. Точно

[1] $\mathrm{O} + \mathrm{e} \rightarrow \mathrm{O}' + 162$. $\mathrm{O}' + \mathrm{e} \rightarrow \mathrm{O}'' - 204$ б. кал. Очевидно, здесь нужна работа в 204 кал. из-за отталкивательной силы уже присоединенного электрона. Соединение же O'-иона с $\mathrm{H}^{\vee}$-ионом нейтрализует отталкивательную силу электрона O'-иона. И действительно:

$$\mathrm{O}'\mathrm{H}^{\vee} + \mathrm{e} \rightarrow {}'\mathrm{O}'\mathrm{H}^{\vee} + 94.5 \text{ б. кал.}$$

Тепловой эффект последнего процесса расчислен следующим образом.

По К. Фаянсу гидроксил $\mathrm{O}'\mathrm{H}^{\vee}$ аналог атома фтора — псевдоатом. В гидроксиле, как и в атоме фтора, девять электронов и девять положительных зарядов: 8 — ядра кислорода и 1 — присоединенного протона. Последний, по всей вероятности, находится внутри электронной оболочки иона кислорода, во всяком случае тесно с последним связан. Поэтому гидроксил (не гидроксил-ион) должен быть похож на атом фтора. По моему мнению этот псевдоатом должен быть по своим свойствам средним арифметическим между атомами фтора и хлора, по крайней мере, в отношении своего сродства к электрону. Гольдшмидт дает для радиусов ионов фтора, гидроксила и хлора величины: 1.33 : 1.4 — 1.5 : 1.81 A. Радиус иона гидроксила является средним арифметическим из величин радиусов фтора и хлора. Сродство хлора к электрону равно 89, сродство фтора — 100 (вычислено мною. См. Неорганическая химия Л. Писаржевского и М. Розенберг, 1933, Галоиды). Отсюда сродство гидроксила к электрону равно:

$$E_{\text{он}} = \frac{100 + 89}{2} = 94.5 \text{ б. кал.}$$

так же можно считать установленным образование O'-ионов действием свободных электронов платины на молекулы кислорода. Образование же поверхностого соединения $Pt^{\ddot{}}\text{---}O'$, где O'-ионы не образуют кристаллической решетки с ионами платины, является вполне вероятным.

Существование этого поверхностного соединения для кислорода и отсутствие подобного соединения платины с водородом подтверждается невозможностью удалить адсорбированный кислород с поверхности платины откачиванием насосом даже при 350°, в то время как водород удаляется легко уже при 250°.

Против существования поверхностных соединений платины с водородом и за существование подобных соединений с кислородом говорит и энергетика процессов образования отрицательных ионов кислорода и водорода из свободных электронов и молекул O_2 и H_2 (см. выше).

Действие катализатора-платины на молекулы кислорода доказывает, что свободные электроны металла-катализатора принимают участие в катализе.

Действие же платины на абсорбированные молекулы водорода и энергетика процесса образования отрицательных ионов последнего из его молекул и свободных электронов показывают, что не все участвующие в катализируемой реакции вещества непременно реагируют по схеме Поланьи при посредстве своих промежуточных поверхностных соединений с катализатором-металлом.

Быть может, в тот момент, когда на поверхности платины образуются гидроксилы $O'H^{\check{}}$ путем соединения O'-ионов с $H^{\check{}}$-ионами, они, оторвавшись от платины, соединяются друг с другом, образуя молекулы перекиси водорода:

$$2O'H^{\check{}} \rightarrow H_2^{\check{}}(O_2)'' + 48 \text{ б. кал.}^{1},$$

которые тут же быстро разлагаются на воду и кислород (платина катализирует разложение H_2O_2).

Быть может, вообще катализ гремучего газа идет через образование перекиси водорода? Мы знаем, ведь, что водород в виде отдельных атомов

[1] Тепловой эффект соединения гидроксилов в молекулы перекиси водорода расчисляется так:

$$\begin{array}{l} H_2O_{2\,aq} \rightarrow H_2O_{\text{жидк.}} + O - 35.5 \\ H_2O_{2\,\text{жидк.}} + aq \rightarrow H_2O_{2\,aq} + 0.5 \\ H_2O_{2\,\text{газ.}} \rightarrow H_2O_{2\,\text{жидк.}} + 11.6 \\ H_2O_{\text{жидк.}} \rightarrow H_2O_{\text{газ.}} - 10.6 \\ \hline H_2O_{2\,\text{газ.}} \rightarrow H_2O_{\text{газ.}} + O - 34 \end{array}$$

и

$$\begin{array}{l} H_2O_{2\,\text{газ.}} \rightarrow H_2O_{\text{газ.}} + 0 - 34 \\ 2H + 0 \rightarrow H_2O + 216 \\ 2H_2O + 2H + 2OH - 230 \\ \hline H_2O_{2\,\text{газ.}} \rightarrow 2OH_{\text{газ.}} - 48 \text{ б. кал.} \end{array}$$

легко реагирует с молекулами кислорода, образуя молекулы перекиси водорода с последующим их разложением на молекулы воды и кислорода. Тем более, казалось бы, водород в виде отдельных протонов и электронов должен взаимодействовать с молекулами кислорода, давая молекулы перекиси водорода:

$$2H^{\cdot} + 2e + O_2 \rightarrow H_2^{\cdot}(O_2)''$$

Если насытить платину сначала водородом, а затем уже привести ее в соприкосновение с кислородом, то здесь может пойти такой процесс. Молекулы кислорода, не успев превратиться в O'-ионы, непосредственно соединятся с протонами и электронами в молекулы перекиси водорода (конечно в несколько стадий), напр.:

$$H^{\cdot} + e + O_2 \rightarrow (O_2)'H^{\cdot} \text{ и } H^{\cdot} + e + (O_2)'H^{\cdot} \rightarrow H^{\cdot}{}'(O_2)'H^{\cdot}$$

Если сначала поместить платину в атмосферу кислорода, то пойдет процесс образования O'-ионов, поверхностного их соединения с платиной и т. д. (см. выше). И энергетика процессов:

$$e + O'H^{\cdot} \rightarrow {}'O'H^{\cdot} + 94.5 \text{ б. кал. и } H^{\cdot} + {}'O'H^{\cdot} \rightarrow H^{\cdot}{}'O'H^{\cdot} + 331.5 \text{ б. кал.}$$ [1]

говорит в пользу того, что катализ идет, главным образом, путем этих стадий и лишь в небольшой степени может итти в направлении:

$$2O'H^{\cdot} \rightarrow H_2O_2 + 48 \text{ б. кал.}$$

Если же образовавшиеся гидроксилы $O'H^{\cdot}$ тут же переходят в поверхностные соединения $Pt^{\cdot\cdot\cdot\cdot}{-}{}'O'H^{\cdot}$, не успев оторваться (см. выше) от ионов платины, то ход катализа через H_2O_2 совершенно исключается, так как образовавшиеся гидроксильные ионы ${}'O'H^{\cdot}$ не могут соединиться в молекулы перекиси водорода: для этого нужны нейтральные гидроксилы.

Если поместить платину сразу в смесь водорода с кислородом, то процесс катализа пойдет, очевидно, через все описанные выше стадии. Через поверхностные кислородные соединения платины с O'-ионами и путем непосредственного соединения адсорбирующихся молекул кислорода с прото-

[1] Тепловой эффект этого процесса вычисляется так:

$$H_2O \rightarrow H + OH - 115$$
$$H \rightarrow H^{\cdot} + e - 311$$
$$OH + e \rightarrow OH' + 94.5$$

$$HOH \rightarrow H^{\cdot} + {}'O'H^{\cdot} - 331.5 \text{ б. кал.}$$

нами и электронами в молекулы перекиси водорода с последующим их разложением на молекулы воды и кислорода.

Чем еще раз доказывается, что и здесь процесс катализа не должен итти обязательно через промежуточные поверхностные соединения, как этого требует схема Поланьи.

Все, что было сказано до сих пор, является попыткой уяснить себе механизм действия катализатора-металла, — механизм и стадии катализируемого процесса на поверхности катализатора при катализе сухой смеси водорода с кислородом.

Но платина, покрытая слоем воды, также катализирует процесс взаимодействия водорода с кислородом.[1] В этом случае он идет несомненно путем работы кислородно-водородного элемента.

Находящиеся на поверхности платины ионы водорода идут в воду, образуя водородный электрод, ионы же кислорода O' дают с $H^{\cdot}$-ионами гидроксильные ионы, также высылаемые в воду, — получается кислородный электрод. Одновременно, рядом существовать эти электроды не могут. $H^{\cdot}_{aq} + OH'_{aq}$ немедленно дают молекулы воды. Вновь образуются $H^{\cdot}_{aq}$ и OH'_{aq}, вновь соединяются и т. д.

Впервые на возможность протекания катализа гремучего газа во влажном состоянии на влажном катализаторе через кислородно-водородный гальванический элемент указал, сколько мне известно, К. Гофман.[2]

Механизм катализа металлами других процессов гидрогенизации должен быть аналогичен механизму катализа гидрогенизации кислорода. По аналогичной схеме должны протекать при катализе металлами (поглощающими водород) процессы гидрогенизации этилена, окиси углерода в метанол и метан, азота при синтезе аммиака.

Всюду здесь водород, не образуя поверхностных промежуточных соединений, разлагается катализатором-металлом на протоны и электроны и в таком виде легко вступает во взаимодействие.

Молекулы азота, подобно молекулам кислорода, образуют отрицательные однозарядные ионы азота N', дающие с катализатором поверхностные соединения. Молекулы окиси углерода и этилена путем спаривания своих электронов со свободными электронами катализатора дают поверхностные соединения гомеополярного типа. Возможно также, что они образуют со свободными электронами катализатора отрицательные однозарядные молекул-ионы CO' и C_2H_4'.

[1] См. мою статью в Журн. РФХО, 61 (1929), 1625.

[2] K. A. Hofman u. A. Dolde, Ber. d. Deutsch. Chem. Ges., 57 (1924), 1969.

Образовавшиеся так или иначе поверхностные соединения азота, окиси углерода и, этилена с металлом-катализатором вступают далее в реакцию с (H° + e).

В этом состоит здесь активация катализатором участников реакции.

Механизму катализа гидрогенизации металлами азота, окиси углерода и этилена, будет посвящена отдельная статья.

Металл-катализатор работает при катализе своими ионами, своими свободными электронами и комбинацией этих действий. Но не следует забывать, что наилучшие металлы-катализаторы относятся к числу элементов с недостроенными группами электронов. Среди этпх элементов наблюдается явление «электронной изомерии», названное так Р. Свинне.

«Явление электронной изомерии», говорит он, «несомненно связано с существованием каталитической активности указанных элементов и их окислов...»[1]

Если это так, то металл-катализатор, принадлежащий к этой группе элементов, катализирует своими ионами, своими свободными электронами, комбинацией этих факторов и тем или иным действием процессов перехода друг в друга электронных изомеров своих атомов и ионов.

Попытка теоретического подхода к механизму действия этого последнего фактора дана в моей статье: «К вопросу о механизме катализа металлами...»[2]

Изучение возможности участия этого фактора в явлениях катализа должно быть поставлено на очередь.

В заключение еще несколько слов об адсорбции и действии свободных электронов металла-катализатора.

Как-то мне был брошен упрек, что я не уделяю должного внимания адсорбции.

Это, конечно, не верно, как ясно из этой статьи и из всех предыдущих, где я затрагивал вопрос об адсорбции. Я только не заразился наблюдавшимся еще так недавно чрезмерным увлечением адсорбцией, — преувеличением ее значения в механизме гетерогенного катализа.

В противовес этому увлечению я все время указывал на значительную роль свободных электронов катализаторов-металлов.

Я указывал на то, что под понятием адсорбции скрывается, собственно говоря, несколько процессов: притяжение металлом-катализатором катали-

[1] См. мою статью 1929 г., l. c., стр. 1621—1623.
[2] L. c., стр. 1621—1625.

зируемых молекул, действие на них свободных его электронов, его ионов и комбинация этих действий.

Разумеется, без предварительной адсорбции нет гетерогенного катализа.

Но «новейшее развитие области гетерогенного катализа, говорит Вольфганг Оствальд,[1] показало, что две основные переменные величины: развитие поверхности и общая адсорбция, сами по себе определенно недостаточны для объяснения явлений».

Есть случаи, когда ориентировка адсорбированных молекул ведет к замедлению реакции.[2]

Для ускорения процесса «необходима», указывает Вольфганг Оствальд,[3] «весьма специфичная, правильно ориентированная и локализированная — дисперсная адсорбция... Продукт реакции должен десорбироваться автоматически».

По мере того, как понятие об адсорбции диференцировалось и специализировалось, все чаще и чаще стали появляться указания на возможную роль электронов катализатора, как одного из орудий его каталического воздействия.

Еще в 1905 г. P. Kirkby, изучая при низком давлении катализируемый нагретой платиной процесс образования воды из кислорода и водорода, пришел к выводу, что реакция между газами... вызывается, вероятно, испусканием электронов платиной.[4] В 1910 г. Дж. Томсон высказал мнение, что испускание горячей поверхностью заряженных частичек является, вероятно, важным фактором, помогающим горению.[5] В. Бонэ в 1913 г. пришел к такой же мысли.[6] Ф. Крюгер[7] в 1914 г. в работе об отравлении фотоэлектрических элементов говорит: «После этого кажется возможным, что более легкая отдача электронов, поскольку она соответствует более повышенной фотоэлектрической чувствительности, находится в причинной связи с более сильным каталическим действием». Начиная с 1917 г. в докладах и с 1923 г. в печати я неоднократно указывал на свободные электроны катализатора-металла как на механическое и электрическое орудие

[1] Вольфганг Оствальд. Наука о коллоидах, электротехника и гетерогенный катализ 1932 (русск. перевод, стр. 86 и 91).

[2] H. R. Kruyt. Z. f. Elektroch., 35 (1929), 539.

[3] L. c., стр. 91.

[4] Phil. Mag., 10 (6), (1905), 467.

[5] Brit. Ass. Reports, 501 (1910).

[6] Oberflächenverbrennung. Ber., 46 (1913), 5.

[7] F. Krüger und E. Taege. Z. f. Elektroch., 21 (1914), 569.

его действия, действующее на адсорбируемые молекулы механически и как электрические заряды и вызывающее индуцированные переходы электронов в молекулах катализируемых веществ.[1]

В 1929 г. Р. Зурман, как было уже указано,[2] пришел к выводу, что: «Облегчение отдачи электронов с металлических поверхностей посредством адсорбированных ионов водорода могло бы иметь решающее значение при гидрировании».

Наконец, в 1930 г. Вольфганг Оствальд[3] показал, что «правильно окисленная медная пластинка является одновременно выпрямителем, фотоэлектрическим элементом и каталитическим контактом...»

И это не единственный случай. «Покрытая электролитически водородом платиновая пластинка ведет себя как электролитический выпрямитель; с другой стороны, $Pt + H_2$ является одним из известнейших катализаторов гидрогенизации... наконец, $Pt + H_2$ — высокочувствительный фотоэлектрический элемент».

«Общим основным процессом», говорит Вольфганг Оствальд, «во всех трех случаях является движение электронов. В некоторых выпрямителях, в некоторых фотоэлектрических элементах и в некоторых контактах эти электронные движения (в одном направлении) особенно легки. Подвижность электронов вследствие высокого напряжения поля и малой величины работы выхода здесь особенно велика. Данные приборы являются в этом смысле как бы «приспособлениями для мобилизации» электронов. Кроме того, они являются приборами, посредством которых эти электронные движения могут направляться, быть может, также концентрироваться, собираться в фокус...»

Вольфганг Оствальд дает и схему действия электронов каталитического контакта. О ней я буду говорить подробно в статье, специально посвященной роли свободных электронов металла-катализатора в гетерогенном катализе и активным центрам.

Здесь я хотел лишь указать на то, что свободные электроны металла, как специфическое орудие его каталитической активности, начинают, наконец, занимать подобающее им место в теории гетерогенного катализа.

Для проверки правильности ориентировки исследования гетерогенного катализа в направлениях, намечаемых данными мною схемами, в моих лабораториях уже несколько лет изучаются взаимодействия излучений и ката-

[1] L. c.

[2] L. c.

[3] L. c. и Kolloid-Zeitschr. Bd. 57, Hefft 1 (1931) 7 и Bd. 51, Heft 3 (1930) 370.

лизатора, а также — излучений, катализатора и электрического поля, — изучается влияние излучений на работающий катализатор, влияние предварительного облучения катализатора на его каталитическую активность; недавно предпринято изучение влияния излучений на адсорбцию.

Теоретическому обоснованию этих взаимодействий и добытым здесь экспериментальным данным будет посвящена отдельная статья.

РЕЗЮМЕ

Свободные электроны металлов должны быть одним из орудий каталитического действия последних.

Металлы легко могут предоставить свои свободные электроны в распоряжение адсорбируемых ими молекул для спаривания с электронами целых молекул или с электронами их атомов. От этой особенности металлов зависит их большая каталитическая активность.

Металл-катализатор работает при катализе своими ионами, своими свободными электронами и комбинацией их действий.

Выходящие на поверхность катализирующего металла его свободные электроны спариваются с электронами атомов катализируемых веществ и образуют при этом отрицательные ионы с атомами адсорбируемых катализатором молекул тех веществ, к атомам которых они обладают достаточно для этого выраженным электросродством.

При настоящем состоянии наших знаний о скорости движения свободных электронов внутри металла мы имеем право говорить о наличии и механического действия этих свободных электронов металла-катализатора при обыкновенной температуре лишь внутри его, — на способные туда проникнуть молекулы или атомы катализируемых веществ.

Внутри металла (поглощающего водород) действие зарядов его ионов и его свободных электронов и механическое действие этих его электронов вызывают диссоциацию водорода на протоны и электроны.

В этом и состоит активирование водорода металлом-катализатором при катализах гидрирования: кислорода, азота, этилена и окиси углерода.

Активирование же этих последних производится свободными электронами металла-катализатора путем образования отрицательных однозарядных ионов кислорода и азота и путем спаривания с электронами молекул окиси углерода и этилена с образованием неполярных связей, а, быть может, также путем образования отрицательных молекул-ионов CO' и C_2H_4'.

Получаемые при этом нестойкие соединения поверхности катализатора с подобными ионами и молекулами легко реагируют с выходящими на поверхность металла протонами и электронами.

Процесс гетерогенного катализа металлами не должен итти обязательно через промежуточные нестойкие поверхностные соединения катализатора с катализируемыми веществами.

Изучение возможности связи между каталитической активностью металла и существованием в его атомах недостроенных групп электронов должно быть поставлено на очередь.

Днепропетровск
Институт физической химии
20 I 1933

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1933
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles — Отделение математических и естественных наук

К ВОПРОСУ О ФОРМАХ ВЫРАЖЕНИЯ ГИДРОХИМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Б. Н. ФОРША

(*Представлено* Байкальской лимнологической станцией)

В истории гидрохимии неоднократно происходила смена форм выражения анализов. Солевая форма выражения анализов была заменена окисло-ангидридной, окисло-ангидридная — ионной и, наконец, эта последняя заменяется эквивалентной и молекулярной формами.

Замены солевой формы окисло-ангидридной и окисло-ангидридной — ионнной были вызваны причинами одного, хотя в некотором смысле и прямо противоположного характера. Замена солевой формы окисло-ангидридной была вызвана желанием отказаться от произвола в комбинировании «радикалов» в соли (по Bunsen'у или по Fresenius'у) стремлением заменить сложную и несоответствующую реальной действительности форму более простой, хотя и столь же мало соответствующей реальной действительности (ибо, ведь, никакой аналитик, выражающий результаты своего анализа в виде Na_2O или SO_3 не предполагал наличия этих окислов в воде, «как таковых»). Замена же окисло-ангидридной формы — ионной, наоборот, была вызвана желанием принять форму, соответствующую реальной действительности согласно физико-химическому учению о разбавленных растворах. Но при всех этих изменениях формы размерность единиц, которыми выражалось содержание различных ингредиентов в воде, оставалась постоянной и независимой от формы выражения анализа. Этой размерностью была весовая концентрация, численно измеряемая отношением массы к объему (грамм или миллиграмм в литре или, реже, в куб. метре). Единица массы была независимой от рода ингредиента. Иная картина получается при переходе к эквивалентной и эквимолекулярной формам. Эквивалентная и эквимолекулярная формы не являются следствием какого-либо иного представления о физико-химическом состоянии ингредиентов, растворенных в воде. В некотором смысле для эквивалентной и эквимолекулярной форм даже

безразлично, в каком состоянии находятся эти ингредиенты. Пересчитывая в эквивалентную форму старые анализы одной и той же воды, мы получим для данного ингредиента, напр. для натрия, одно и то же численное значение, независимо от того, в какой форме он был выражен раньше: в виде NaCl или каких-либо других солей, в виде окисла Na_2O или в виде иона $Na^{\cdot}$. Поэтому совершенно неправильно называть, как это делают некоторые авторы, новую единицу, вводимую эквивалентной формой, миллиграмм-ион-эквивалентом. Эквивалент есть понятие, независимое от ионной теории. Эквивалентная и эквимолекулярная формы отличаются от остальных форм выражения анализов именно иной размерностью единиц концентрации ингредиентов, растворенных в воде. Не грамм или миллиграмм в литре, но грамм или миллиграмм-эквивалент («милливаль») или грамм или миллиграмм-молекула («миллимоль») в литре. Для каждого качественно иного ингредиента устанавливается своя особая, количественно иная единица. В этом отношении эквивалентная и эквимолекулярная формы сближаются с символикой общей химии, где под знаком данного элемента подразумеваются количества, пропорциональные не просто весовому процентному содержанию его в данном соединении, но отношению этих количеств к некоторой особой для каждого элемента единице (атомному весу). Так, напр., формулы окиси и двуокиси углерода пишутся не C_3O_4 и не C_3O_8, но CO и CO_2.

Какая же из всех вышеприведенных форм является наиболее целесообразной?

Настоящая работа и есть попытка дать оценку целесообразности этих форм с диалектической точки зрения.

Основным требованием, предъявляемым принципами диалектики к гидрохимии является требование изучения не состояния воды, а процессов в данной воде происходящих, не состава воды в данный момент времени, а изменения состава воды во времени. Следовательно и формы выражения анализов должны удовлетворять этому требованию, т. е. быть приспособлены к изучению изменения состава природных вод, к изучению реакций, происходящих в природных водах. Но какие бы реакции ни происходили в воде, будь то выпадение солей, выделение газов, окисление, восстановление, фотосинтез, разложение органических веществ и т. д. — все ингредиенты, в них участвующие, будут реагировать друг с другом всегда в эквивалетных количествах.

Пусть, напр., в некотором водоеме происходит выпадение $CaSO_4$. Зная количество выпавшего SO_4''-иона, можно определить и количество выпавшего при этом $Ca^{\cdot\cdot}$ — эти количества будут эквивалентны. При эквивалент-

ной форме выражения анализов величины, выражающие эти количества, будут равны. При ионной же, окисло-андидридной и т. п. формах выражения анализа для определения этих количеств потребуется ряд более или менее сложных и бесполезных пересчетов. Отсюда громадное значение эквивалентной формы выражения анализов как метода, наиболее быстро и просто позволяющего разобраться в динамике происходящих в природных водах процессов, — значение, которое, повидимому, не было достаточно оценено как самими авторами, так и пропагандистами этого метода. Так, в литературе уже стал классическим пример «насыщения» 39.5 миллиграммами SO_4'' десяти миллиграмм магния (0.822 миллиграмм-эквивалента) — пример, которым часто ограничиваются при изложении преимуществ эквилентной формы выражения анализов. Но недостаточность этого примера ясна уже из того, что он относится только к изучению состава, а не изменения этого состава, данной воды, не говоря уже о том, что насыщение магния именно сульфатами в воде, содержащей безусловно и другие ионы, есть условность, в то время как выпадение солей, выделение газов и т. п. реакции есть реальный факт.

Обычно рекомендуется для выражения результатов анализа в эквивалентной форме перечислять данные ионной формы путем помножения соответствующих величин на «пересчетные коэффициенты» (RC), представляющие не что иное, как обратные величины эквивалентов. Происхождение этих «пересчетных коэффициентов» исторически понятно, и применение их действительно необходимо там, где мы уже не имеем под рукой сырого материала анализов, т. е. во всех анализах, произведенных ранее распространения эквивалентной формы. Но оно вряд ли целесообразно при вычислении результатов нового анализа, так как при выражении результатов анализа в ионной или в окисло-ангидридной формах мы, в большинстве случаев, явно или неявно проходим через стадию эквивалентной формы. Вряд ли можно признать целесообразным умножение некоторого количества сначала на прямую (эквивалент данного иона или окисла), а затем на обратную (RC) величину. Для того, чтобы убедиться в этом прохождении через эквивалентную форму, рассмотрим процесс вычисления анализов при различных методах гидрохимического анализа.

Наиболее распространенными методами гидрохимического анализа являются весовой и объемный анализы (реже колориметрический или сходный с ним нефелометрический). Наиболее ясно значение эквивалентов в методах широко распространенного в гидрохимии объемного анализа. Что это действительно так, ясно из того, что при наличии, на ряду с основным

ингредиентом, некоторых других, оттитровывающихся вместе с ним, напр. брома на ряду с хлором при титрометрическом его определении, или силикатов на ряду с карбонатами при определении щелочности — результаты анализа (число куб. сантиметров, пошедшего на титрование раствора) пропорциональны именно сумме эквивалентов этих ингредиентов, а не сумме весовых количеств ионов или окислов, образуемых этими ингредиентами. Для выражения результатов анализа в эквивалентной форме необходимо число куб. сантиметров раствора, пошедшего на титрование данной пробы, умножить на некоторый множитель, зависящий только от объема взятой для анализа воды и нормальности и фактора раствора. В методах весового анализа сравнительно весьма редко приходится определять (взвешивать) различные ингредиенты в той форме, в которой они впоследствии будут выражены. Таковы, напр., определения SiO_2, Al_2O_3, Fe_2O_3, иногда CaO (при выражении результатов анализа в окисло-ангидридной форме). В большинстве случаев данный ингредиент взвешивается не в той форме, в которой предполагается его выразить, и затем полученный результат умножается на аналитический множитель, представляющий собою отношение эквивалентных или молекулярных весов этих двух форм. Таким образом, при этом перечислении происходит скрытый переход через эквивалентную форму. Против неизбежности этого перехода можно возразить, что, разбивая умножение на аналитический множитель, представляющий отношение двух величин на последовательные действия деления и умножения, не обязательно производить эти действия в указанном порядке, и что при обратном порядке этих действий никакого перехода через эквивалентную форму не получается. Но подобное возражение будет верно только с формально-математической точки зрения. Оставаясь на реально материалистической точке зрения, необходимо, чтобы каждая вводимая вновь величина имела реальный физический смысл. Физический смысл отношения величины, являющейся непосредственным результатом анализа (взвешивания) к эквивалентному (или молекулярному) весу соединения, в виде которого производилось определение данного ингредиента, ясен — это есть эквивалентная (или молекулярная) форма выражения содержания данного ингредиента в некотором объеме воды. Но произведение этого непосредственного результата на эквивалентный (или молекулярный) вес того соединения или радикала, в виде которого желательно выразить содержание данного ингредиента, лишено какого-либо реального смысла. Таким образом, эквивалентная форма выражения анализов теоретически предшествует ионной и т. п. формам. Она должна предшествовать им и практически (во избежание по-

тери точности при двойном пересчете) в тех случаях, когда предполагается дать анализ не только в эквивалентной, но и в какой-либо другой (напр. ионной) форме.

Если признать эквивалентную форму выражения анализов наиболее целесообразной для отдельных ионов, входящих в состав данной воды, то тем более целесообразно ее применение для выражения таких свойств воды, которые являются пропорциональными сумме эквивалентов: щелочности (пропорциональной сумме эквивалентов солей слабых кислот) и жесткости (пропорциональной сумме эквивалентов щелочно-земельных и земельных металлов). Щелочность воды обычно и выражается таким образом. Но жесткость и по сию пору, даже при эквивалентной форме, выражается обычно в виде немецких (реже французских или английских) градусов, основанных на содержании в воде определенного количества окиси кальция (немецкий градус), или углекислой соли кальция (французский и английский градусы). При этом содержание магния пересчитывается на эквивалентное ему содержание кальция, тогда как, выражая жесткость в эквивалентных единицах (милливалях щелочно-земельных и земельных металлов в литре), величина общей жесткости получается непосредственно суммированием эквивалентов кальция и магния (и земельных металлов). Я предлагаю назвать эту единицу Советским градусом жесткости.

Валентность многих элементов, радикалов и соединений, как известно, не является постоянной величиной. Так, напр., оксидиметрическая валентность (валентность в реакциях окисления и восстановления) часто не совпадает с ациди- и алкалиметрической валентностью (валентность в реакциях нейтрализации, осаждения и др. ионных реакциях). Соответственно меняется и величина эквивалента, а, следовательно, и величина концентрации данного ингредиента в воде, выраженная в эквивалентной форме: эквивалентная форма выражения анализов основывалась до сих пор только на ионной валентности и применялась только к ионы-образующим ингредиентам. Но в этой форме не могут быть выражены ингредиенты, не образующие ионов (газы, коллоиды), и ингредиенты, образующие ионы неизвестной валентности (силикаты, алюминаты). Этот недостаток эквивалентной формы выражения анализов является у нее общим с ионной формой выражения. Подобным же недостатком обладает и окисло-ангидридная форма. В ней не могут быть выражены ингредиенты кислот, не имеющих ангидридов (HCl). В оксидиметрически эквивалентной форме могло бы быть выражено содержание кислорода (как окислителя), сероводорода, низших степеней окисления серы и др. восстановителей. Но, принимая во

внимание, что величина эквивалента данного ингредиента (напр. сероводорода) будет различной, в зависимости от того, до какой степени происходит его окисление (напр. окисление H_2S до S, до SO_4'' или до какой-либо низшей степени окисления серы), и что, с другой стороны, существует целый ряд ингредиентов, почти или совершенно не участвующих в реакциях, происходящих в природных водах (азот, благородные газы) — приходится констатировать, что эквивалентную форму выражения анализов нельзя признать всеобщей формой.

Единственной всеобщей формой выражения анализов является форма молекулярная. Правда, при разрешении вопросов динамики процессов, происходящих в природных водах, при выражении результатов анализа в молекулярной форме, приходится производить умножения на те или иные коэффициенты, но эти коэффициенты всегда целые, небольшие числа. Такое перечисление зачастую возможно произвести даже в уме. Во всяком случае, оно никогда не потребует сколько-нибудь значительной затраты труда и времени. Таким образом, и молекулярная форма выражения анализов оказывается значительно лучше приспособленной для изучения динамики процессов по сравнению с окисло-ангидридной и т. п. формами. В молекулярной форме можно выражать не только такие слабокислотные, амфотерные и слабоосновные ингредиенты, как соединения кремния, алюминия, железа, но и все газообразные ингредиенты.

Единицами выражения газообразных ингредиентов являются обычно либо число куб. сантиметров, либо число миллиграммов данного газа, растворенных в одном литре воды.

Под числом куб. сантиметров газа здесь понимается тот объем, который з а н я л бы (при нормальных условиях) газ, в ы д е л е н н ы й из одного литра воды. Объем, газа р а с т в о р е н н о г о в воде, равен объему самой воды, т. е. одному литру. Отсюда ясна вся условность подобной формы выражения анализов.

В руках неспециалиста химика она иногда приводит к весьма грубой ошибке: к отождествлению кубического сантиметра в литре ($см^3/л$) с промиллем ($^0/_{00}$), ошибки ясной из того, что, говоря, что количество данного газа, растворенного в воде, равно $n\ ^0/_{00}$ ($= см^3/л$), мы тем самым подразумеваем, что количество воды в данной системе вода — газ равно $1000 - n\ ^0/_{00}$ ($= см^3/л$), в то время как объем воды, из которой был бы действительно выделен данный газ, останется приблизительно прежним, во всяком случае никогда не будет составлять $\frac{1000 - n}{1000}$ части первоначального объема. Происхождение

этой формы выражения анализа следует искать в непосредственных результатах газометрического анализа. Но в настоящее время многие газы, растворенные в воде определяются не газометрически, а титрометрически (CO_2, O_2, H_2S) или даже гравиметрически (CO_2). Следовательно, по отношению к ним форму выражения анализов в куб. сантиметрах нельзя считать «непосредственными данными».

Следующая форма выражения анализов газообразных ингредиентов в миллиграммах на литр лишена указанного выше принципиального недостатка. Но зато она, вместе с ним, лишена и значительного преимущества предыдущей формы.

Дело в том, что при изучении реакций фотосинтеза оказалось весьма удобным выражать анализы в куб. сантиметрах, так как отношения объема выделенного кислорода к объему поглощенной углекислоты равно единице, т. е. объем выделяемого кислорода = объему поглощаемой углекислоты. Но само это равенство является неизбежным следствием уравнения реакции фотосинтеза и закона Авогадро, гласящего, что равные объемы газов содержат одинаковые количества молекул. Следовательно, при выражении газообразных ингредиентов в эквимолекулярной форме сохраняется это преимущество объемного выражения газов. Отношение объема выделяемого кислорода к объему поглощаемой углекислоты и для эквимолекулярной формы остается равным единице. Но, кроме того, при этой форме выражения мы получаем возможность судить не только о реакциях, идущих между несколькими газообразными ингредиентами, не только о реакции фотосинтеза, но и о реакциях, идущих между газообразными и негазообразными ингредиентами, напр., между кислородом и могущими присутствовать в водах восстановителями при реакциях их окисления, между свободной углекислотой и ее «фиксированными» формами, при реакциях, сопровождающихся изменением активной реакции воды.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1933
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

О ПОДРАЗДЕЛЕНИИ И ВОЗРАСТЕ АНТРАКОЛИТОВОЙ СИСТЕМЫ КУЗНЕЦКОГО БАССЕЙНА НА ОСНОВАНИИ ИСКОПАЕМОЙ ФЛОРЫ

М. Д. ЗАЛЕССКОГО

(*Представлено академиком* В. Л. Комаровым)

Под Кузнецким бассейном подразумевают обширную, всхолмленную, богатую угольными залежами равнину восточной части Западной Сибири (в Томском крае), ограниченную почти со всех сторон горными хребтами: на востоке и северо-востоке Кузнецким Алатау, на юго-западе Салаиром, а на юге соединяющимися здесь отрогами этих двух хребтов. С северо-запада же она остается открытою и постепенно сливается с западно-сибирскою низменностью. Обширные угольные залежи, с мощностью пластов до 15 м, заключены в древних осадках морской литторальной зоны на различных горизонтах их толщи, которая по подсчетам геологов П. И. Бутова и В. И. Яворского достигает примерно 7700 м. Вся эта толща согласно залегает на морских прибрежных осадках нижнего карбона, относимого по фауне, заключающейся в известняках его, к турнейскому подъярусу, т. е. к низам динантского яруса европейского карбона. В основании угленосной толщи, указанной мощности, залегает во многих местах бассейна конгломерат, достигающий от 3 до 25 м мощности. Он прослеживается по всем окраинам бассейна и лежит всюду почти на одном и том же горизонте нижнего карбона. В виду тесной связи в стратиграфическом отношении угленосной толщи бассейна с нижележащими осадками нижнего карбона, большинство исследователей бассейна без обращения должного внимания на растительные остатки, встречающиеся в этой толще, рассматривали ее всецело как карбоновую. Этот неправильный вывод долго держался в среде геологов, пока не обратились за разрешением вопроса о возрасте этих угленосных осадков к ископаемой флоре, хорошо представленной местами в породах этой толщи на различных горизонтах ее. Тогда явилась возможность точно, на основании анализа растительных форм, определить истин-

ный возраст этой толщи, отложение которой захватывает в большей своей части наиболее позднюю эру антраколитового периода.

Здесь я только кратко и в общих чертах коснусь работы предшествовавших исследователей ископаемой флоры Кузнецкого бассейна, которые сами не работали в бассейне, но высказывали мнение о возрасте всей угленосной толщи по доставлявшимся им оттуда растительным остаткам из разных мест и горизонтов. По комплексу этих форм, конечно, трудно было без изучения разреза дать правильное определение возраста заключающих их слоев. Надо указать прежде всего, что на основании изучения растительных остатков Goeppert'ом, доставленных ему Чихачевым, этот последний определил угленосную толщу бассейна, как соответствующую по возрасту красному лежню Германии, — вывод очень близкий к тому, какой делается мною теперь. Старые сборы растительных остатков из Кузнецкого бассейна и вообще из Сибири, бывшие в руках Шмальгаузена, были сохраняемы в музеях С.-Петербурга без достаточного внимания к ним, и точные местонахождения образцов не для всех были известны или были очень проблематичны, а потому определение возраста угленосной толщи бассейна, сделанное по ним Шмальгаузеном, оказалось неверным. Определенные им юрские формы, действительно находившиеся в коллекции, но без точных этикеток, были приобщены им в его флоре к заведомо пермским формам с более или менее точными местонахождениями, происходящими из указанной угленосной толщи бассейна и повлияли на ход его мысли, приведя к выводу о юрском возрасте этой последней. Если впоследствии и было обнаружено Шороховым и Нейбург присутствие на территории Кузнецкого бассейна осадков с флорою мезозойского типа, то эти осадки ничего общего не имеют с осадками угленосной толщи бассейна, угольные залежи которой повлияли на выделение этой местности в Кузнецкий угольный бассейн. Определение R. Zeiller'ом пермского возраста угленосной толщи Кузнецкого бассейна было основано также на случайном материале, который происходил, главным образом, из тех свит, которые впоследствии были выделены мною в кольчугинскую и абинскую, т. е. из отложений, принадлежащих к верхней и средней части угленосной серии. Zeiller правильно определил возраст изученной им флоры как пермский, но так как ему необходимо было считаться с литературными данными о существовании среди пермских растений элементов мезозойских, то вопрос о возрасте отложений, с такой смешанной флорой, остался все же загадочным. Я первый имел возможность видеть растительные остатки новых сборов партии Л. И. Лутугина из всех почти выделенных ею свит угленосной толщи бассейна, и эти новые

материалы по флоре согласно говорили мне о пермском возрасте ее. Так как я сам в Кузнецком бассейне тогда еще не был и не мог проследить ни последовательности свит, ни изменений в них ископаемой флоры, пришлось ограничиться тем, что сообщали бывшие там и собиравшие флору геологи. Эта последовательность свит была не совсем правильно понята П. И. Бутовым и В. И. Яворским, и потому материалы по флоре были указаны в моей работе «О возрасте угленосной толщи Кузнецкого бассейна» не в должной последовательности их смены одних другими и, кроме того, мне пришлось пользоваться, к сожалению, теми коллекциями из Кузнецкого бассейна, которыми пользовался и Шмальгаузен и которые рядом с пермскими заключали и мезозойские типы растений, так что и в моей работе эти растения мезозоя внесли в нее ту неопределенность в возрасте, которая возникала у каждого при желании объяснить это наличие в одной и той же флоре пермских и юрских форм. Кроме того, в этой работе я не придал большого значения наличию лепидодендронов в низах антраколитовой толщи и ошибочно присоединил отложения с ними к вышележащей угленосной толще с пермскою флорою.

Когда в Кузнецком бассейне приступили к более детальной геологической съемке местности, и стала выясняться работами С. В. Кумпана и В. Д. Фомичева истинная последовательность свит, начали поступать от первого и новые материалы из Кузнецкого бассейна, которые переданы были мне для изучения и стали вносить ясность в истинную последовательность смен флоры от свиты к свите даже для человека, который там никогда не был. Однако, планомерная работа в этом направлении была нарушена, вопреки научной этике, вторжением в дело исследования ископаемой флоры Кузнецкого бассейна М. Ф. Нейбург. Она посетила в 1928 г. Кузнецкий бассейн и на месте, конечно, выяснила в течение своих полевых работ с помощью В. А. Орестова и В. Д. Фомичева, с атласом моим в руках, всю эту последовательность с бо́льшею легкостью, чем я это смог сделать в кабинете, и уже в мае 1929 г. в докладах Академии Наук[1] опубликовала результаты этого исследования; они внесли исправления в списки растений двух главных угленосных свит Кузнецкого бассейна (балахонской и кольчугинской, тогда называвшейся подкемеровской), опубликованные мною раньше. Здесь же было сообщено о нахождении ею в одной из свит Кузнецкого бассейна юрской флоры с указанием, что образцы *Ginkgo digitata* Brongn. из-под Протопоповой (Монастыря), изобра-

[1] М. Ф. Нейбург. К стратиграфии и возрасту угленосных отложений Кузнецкого бассейна в Сибири.

женные мною в моем атласе «Палеозойская флора Ангарской серии» и доставленные мне кузнецкими геологами, как найденные ими в подкемеровской (= кольчугинской) свите, на самом деле происходят из вышележащей покрывающей ее свиты пород, которая к антраколитовой системе бассейна не относится и является значительно более молодой. Эта свита обнаружена во многих частях бассейна и выделена П. И. Бутовым и В. И. Яворским в особую конгломератовую свиту. Флору этой свиты обнаружили почти одновременно Л. М. Шорохов[1] и М. Ф. Нейбург. Находка эта, как ни важна сама по себе для местной геологии, нисколько не влияет на вопрос о возрасте основной угленосной толщи Кузнецкого бассейна, по которой он назван в литературе «каменноугольным». Значение ее в этом вопросе сказалось только в том, что объяснило, как могли попасть в старые коллекции на ряду с пермскими растениями некоторые типы мезозойской флоры, повлиявшие так плачевно на вывод работы Шмальгаузена и испортившие и мою работу, считавшуюся мною как-будто хорошо сделанною.[2]

Эти материалы, однако, я должен был присоединить в своем атласе «Палеозойской флоры Ангарской серии», как возможную принадлежность флоры палеозоя, что, конечно, не могло быть само по себе ошибочным, как кажется некоторым,[3] так как известно, что в перми уже существовали представители папоротников из рода *Cladophlebis* и представители тех салисбюриевых, которые объединяются в ископаемый род *Ginkgoites*, а потому существование других подобных форм нисколько не исключалось. Оба рода были, кроме того, обнаружены мною недавно и в Кузнецком бассейне в верхней свите угленосной толщи его, выделяемой мною в кольчугинскую. Я не буду здесь продолжать изложение истории исследования ископаемой флоры Кузнецкого бассейна. Это совершенно излишне. С 1929 г. я три года подряд ездил в Кузнецкий бассейн и занимался изучением разреза и флоры угленосной толщи на месте, составив о разрезе и о флоре этой толщи свой личный взгляд. Поэтому только его я считаю для себя ценным, как проверенный, и считаюсь с литературными данными только такими, которые не противоречат моим личным наблюдениям отчасти уже

[1] Л. М. Шорохов. К вопросу о мезозойских отложениях в пределах Кузнецкого каменноугольного бассейна. Вестн. Геол. Ком., 1929, № 2.

[2] Вот к чему приводит небрежное отношение к коллекциям и отсутствие на них наклеенных, четко написанных этикеток. Эта небрежность к коллекциям особенно характерна для нашего времени и будет служить впоследствии источником многих ошибок.

[3] Елиашевич. К вопросу о возрасте Кузнецких угленосных отложений. Bull. de la Société des Naturalistes de Moscou, Section géologique, tome V (I), 1927, p. 61.

опубликованным.[1] Впрочем, ниже я указываю иногда вскользь те критические замечания, какие считаю нужным сделать в отношении другой недавно вышедшей несостоятельной работы М. Ф. Нейбург,[2] рассматривающей расширенную балахонскую свиту В. Д. Фомичева без всяких к тому научных оснований за верхний карбон, а кольчугинскую за нижнюю пермь. Она сумела, как это ни странно, продолжать и эти годы свое исследование ископаемой флоры Кузнецкого бассейна уже от одного и того же геологического учреждения параллельно и одновременно с моим, которое производилось мною в сотрудничестве с Е. Ф. Чирковой,[3] которой считаю здесь обязанным выразить мою признательность и благодарность.

Прежде чем перейти к подразделению на основании ископаемой флоры угленосной серии антраколитовой системы Кузнецкого бассейна, мне следует остановиться на том подразделении ее, которое до сих пор было общепринятым у геологов после известных исследований в этом бассейне П. И. Бутова и В. И. Яворского. Эти исследователи, имея практическое задание возможно скорее дать геологическую карту Кузнецкого бассейна в интересах начавшей развиваться здесь промышленности, должны были поступить так, как это было сделано, отчасти, в Донецком бассейне при аналогичных условиях, тем более, что метод такой ускоренной геологической съемки, продиктованный обстоятельствами, перенесен был в Куз-

[1] М. Д. Залесский. Распространение ископаемой флоры, родственной Гондванской в пределах сев. части Евразии. ИАН, 1930, стр. 913. — М. Д. Залесский и Е. Ф Чиркова. О составе материнского вещества углей Кузнецкого бассейна. ИАН, 1931. — M. D. Zalessky. Observation sur les Insectes trouvés dans les dépôts à charbon du bassin de Kousnetzk et sur l'âge de ces derniers d'après la faune entomologique. Bull. Soc. Géol. de France, 1931, tome I, fasc. 3—4.— M. D. Zalessky et E. Th. Tchirkova. Observations sur la constitution de la substance-mère des charbons du bassin de Kousnetzk. Bull. Soc. Géol. de France, 1931. — M. D. Zalessky. Observations sur l'extension d'une flore fossile voisine de celle de Gondwana dans la partie septentrionale de l'Eurasie. Bull. Soc. Géol. de France, 1931.

[2] М. Ф. Нейбург. Опыт стратиграфического и возрастного подразделения угленосной серии осадков Кузнецкого бассейна, Изв. ГГРУ, 1931, вып. 5. Этот автор совершенно незнаком с каменноугольною флорою. Это вполне очевидно, раз он вестфальские *Sphenopteris Laurenti* Andrae, *Sphenophyllum majus* (Bronn), *Annularia microphylla* Sauveur считает «верхнекаменноугольными типами Западной Европы» на ряду с действительно стефанским видом *Pecopteris oreopteridia* Schloth. Все эти формы, определенные Нейбург в томской свите Кузнецкого бассейна, на самом деле там отсутствуют и нигде в таком сообществе находимы не были и никогда не могли бы указывать на верхнекаменноугольный возраст заключающих их слоев (см. стр. 76 работы Нейбург).

Касаться своей критикою работ другого автора по ископаемой флоре Кузнецкого бассейна, Хахлова, я считаю совершенно излишним: эти работы, как и все другие его работы, сделаны без знания дела, а потому внушают к себе мало доверия.

[3] Е. Ф. Чиркова. О генезисе некоторых пермских углей. Природа, май, 1931. К стратиграфии угленосных отложений Кузнецкого бассейна и о *Noeggerathiopsis Theodori* n. sp., характерном кордаите томской свиты. Изв. Союзгеоразведки, 1932.

нецкий бассейн оттуда самим Л. И. Лутугиным, а они были только упорными и способными сотрудниками его и продолжателями.

Они разделили всю угленосную толщу бассейна на ряд свит, пользуясь поневоле в ограниченном размере ископаемыми органическими остатками, главным образом, на основании литологических особенностей ее и присутствия или отсутствия в ней пластов углей. Все эти свиты поэтому не имеют никакой палеонтологической характеристики, и выделение их с научной точки зрения надо признать мало обоснованным и вполне произвольным. Нижнею границею угленосной толщи они принимают конгломерат, связанный, как я уже указал выше, с подлежащими породами нижнекаменноугольного возраста. Всю толщу от этого конгломерата вверх, кончая надкемеровским пластом угля в Томском разрезе от Старой Балахонки до Щегловска, они разделили на четыре свиты: балахонскую с углями, развитыми у Старой Балахонки, свиту пород, не содержавшую по их тогдашнему мнению углей и названную ими поэтому безугольною или пустопорожнею, свиту с рядом углей, подстилавшую верхнюю свиту с двумя мощными пластами угля под селом Кемеровым и названную поэтому подкемеровскою и, наконец, верхнюю свиту кемеровскую. Песчаниками над надкемеровским пластом угля они начинают уже свою надкемеровскую свиту, в которую входит толща серых песчанистых сланцев до красноярских песчаников и, наконец, самая верхняя часть угленосной антраколитовой толщи бассейна, сложенная исключительно из грубых песчаников, выделена ими в красноярскую свиту. Эти все свиты были ими протянуты от Томи к югу и вообще по всему бассейну, причем залежи углей в Кольчугине на р. Ине они причислили к подкемеровской свите, а песчаники у Кузнецка на р. Томи и на Кондоме, как это ни странно, к безугольной свите, в то время как они должны были бы ими сопоставляться, как это высказал впервые В. Д. Фомичев, в Щегловском районе с песчаниками Красного Яра. Более детальные исследования геолого-разведочного характера в Щегловском районе С. В. Кумпана, В. Д. Фомичева и В. А. Орестова обнаружили, что безугольная свита томского разреза под Щегловском насыщена углями, а потому выделение ее в угленосной серии основано было на неверных данных. Затем было указано В. Д. Фомичевым, что залежи углей, развитых в Кольчугине, к подкемеровской свите отнесены быть не могут, так как осадки, заключающие их, налегают на песчаники красноярской свиты, которая таким образом не является верхней свитою в угленосной серии бассейна, а предпоследней, а самой верхней свитой должна быть признана свита, развитая в Кольчугине, которая по комплексу определенных расти-

тельных форм была мною названа ранее кольчугинскою. Эта кольчугинская свита подходит и к Кузнецку, где налегает на серую песчаниковую толщу безугольной свиты, обнаруживая таким образом, что эта последняя может быть сопоставлена в Щегловском районе только с красноярской. Эти важные наблюдения В. Д. Фомичева были проверены мною и Е. Ф. Чирковой на месте и оказались совершенно правильными. О наших наблюдениях по этому вопросу я имел случай уже сообщать и возвращаться к ним не буду. В результате своих наблюдений В. Д. Фомичев все нижние четыре свиты П. И. Бутова и В. И. Яворского объединяет в одну, но называет эту свиту балахонской, что невозможно допустить потому, что с этим названием не связано было никакой палеонтологической характеристики, которая допускала бы расширение первоначальной балахонской свиты вверх с уничтожением вышележащих. Балахонская свита, как мы знаем, была установлена на осадках, развитых у Старой Балахонки, и заключала в себе не больше, как известную серию осадков в определенном разрезе, прослеженную по простиранию, к тому же серию в разных своих частях различного возраста и фаций. Такая же ошибка в применении названия была сделана В. Д. Фомичевым и в отношении безугольной или пустопорожней свиты, когда им было высказано утверждение о том, что безугольная свита Кузнецкого района занимает в разрезе всей угленосной антраколитовой серии положение красноярской свиты в Щегловском районе. Безугольная или пустопорожняя свита, как таковая, перестала существовать как определенная толща пород в Щегловском районе, а потому, как название, утратившее свое значение, не может быть оставлена в применении к красноярской свите, занимающей в том же Щегловском разрезе значительно более высокое положение. По моим наблюдениям нет никаких оснований считать конгломерат началом угленосной толщи, как это предполагают П. И. Бутов и В. И. Яворский, так как нижняя часть балахонской их свиты совершенно не содержит углей и представляет собою чередование песчаников и глинистых сланцев, почти совершенно лишенных органических остатков вообще, и в частности растительных, кроме разве самых низов ее, где обнаруженные растительные остатки указывают определенно на связь песчаников, непосредственно залегающих над конгломератом с подлежащею нижнекарбоновою толщею. В них найдены остатки *Asterocalamites scrobiculatus* Schloth., *Lepidodendron* тур. *Veltheimi* Sternberg, *Sigillaria* из группы *Rhytidolepis-Favularia* и *Demetria* sp., а в сланцах выше, непосредственно над так назыв. строительными песчаниками нижней пачки, приблизительно в 255 м от конгломерата, обрывки перьев *Cardiopteris vesca* Zal. (фиг. 1).

Первые две формы являются обычными и ниже конгломерата в песчаниках на Тыргане недалеко от Прокопьевского и являются растениями определенно динанской или намюрской флоры. *Cardiopteris vesca* Zal. также как будто говорит за такой же возраст, хотя остатки перышек этой формы очень невелики и отождествить их с какими-либо известными формами *Cardiopteris* из нижнего карбона не удалось. Указание М. Ф. Нейбург, что в мощных сланцах ниже первой пачки строительных песчаников найдены были спириферы и продуктусы верно, но чтобы они были верхнекарбонового возраста неизвестно. Сохранение этих окаменелостей настолько плохое, что точное определение их невозможно. Вся остальная толща от конгломерата вверх на 450—600 м (по разным подсчетам) пока остается немою, и возраст ее поэтому гадательный. Эта толща может соответствовать как среднему, так и верхнему карбону и может быть рассматриваема как перерыв между нижним карбоном и слоями собственно угленосной толщи, заключающей угольные пласты, которая по флоре своей даже в самых своих низах должна быть признана по возрасту не древнее нижнепермской. М. Ф. Нейбург считает, что нет основания отделять от собственно угленосной указанную выше песчаниковую толщу потому, что в сланцах на правом берегу р. Чеспоковки у села Верхотомского, непосредственно залегающих над песчаниками с остатками *Lepidodendron* и *Sigillaria*, ею встречен *Angaropteridium cardiopteroides* (Schmalhausen) и *Phyllotheca* sp., т. е. формы, распространенные в нижней свите угленосной толщи, но я думаю, что определения этих растений М. Ф. Нейбург совершенно ошибочны, так как в том же месте мне не удалось найти убедительные отпечатки этих растений. Наблюдавшиеся здесь растительные остатки говорили за присутствие здесь стеблей *Equisetales*, которые можно было бы с бо́льшею уверенностью считать за *Asterocalamites*, чем за *Phyllotheca*. Отдельные перышки циклоптероидного характера, которые могли бы М. Ф. Нейбург напомнить *Angaropteridium cardiopteroides* (Schmah.), скорее всего были нижнекарбоновою формою *Cardiopteris*. Вообще материал отсюда недостаточно хорошей сохранности и недостаточен для такого ее утверждения. Если она настаивает на своих определениях, она должна в подтверждение опубликовать с своих образцов точно выполненные рисунки их. Указание на нахождение остатков, близких к *Caenodendron*, на р. Кондоме ниже Улуса Чуян, под заимкою Чистякова, в песчаниках инте-



Фиг. 1. *Cardiopteris vesca* Zal. Дер. Подъякова, в сланцах выше первой пачки строительных песчаников. Острогская свита. 1 : 1.

ресующей нас толщи, вряд ли тоже что-либо может прибавить в пользу ее взгляда, так как *Caenodendron*—род, установленный по образцам из угленосных осадков киргизских бассейнов Куу-чеку и Экибас-туза, возраст которых надо признать нижнекаменноугольным, так как в последнем бассейне найден *Lepidodendron kirghizicum* Zal. (фиг. 2), близкий к нижнекаменноугольным видам *Lepidodendron Nathorsti* Kidston и *Lepidodendron Jaschei* Roemer.

Первая, хорошо определяемая флора встречается в четырех-восьми метрах над украинским пластом, вторым пластом сверху от 3-й пачки строительных песчаников в расстоянии около 100 м от последних, от которых условно можно начать угленосную свиту. Этот пласт обнажается на правом берегу р. Томи в 2—3 км от впадения в нее рч. Балахонки. Состав флоры будет следующий: *Phyllotheca deliquescens* (Goeppert), *Angaropteridium cardiopteroides* (Schmalh.), *Psygmophyllum Potanini* (Schmalhausen) (фиг. 3 и 4), *Psygmophyllum mongolicum* Zal. (фиг. 5), *Noeggerathiopsis Theodori* Tchirkova et Z. (фиг. 6), *Rhabdocarpus tomiensis* Zal. (фиг. 7), *Samaropsis moracia* Zal. (фиг. 8), *Samaropsis siberiana* Zal. (фиг. 9) и *Dicranophyllum paulum* Zalessky (фиг. 10).

Эта же флора обнаружена была и на восточном крыле Кузнецкого бассейна немного выше устья рч. Мунгата на лев. бер. р. Томи, а немного выше по разрезу в обнажении пр. бер. рч. Мунгата, у устья ее, были обнаружены остатки *Angarodendron Obrutchevi* Zal. (фиг. 11 и 12), образующие даже, кутикулами своими с побегов, небольшой, мощностью до 20 см., пластик угля, обнаруженный впервые В. И. Яворским и прослеживаемый по естественному разрезу над речкою почти у устья ее по простиранию до 80 м и по падению—метров на десять.

Указанную флору надо признать по возрасту нижнепермской на том основании, что *Psygmophyllum mongolicum* Zal. найден был в Буку-Муренской степи совместно с *Callipteris murenensis* Zal., родом, обнаруженным только с нижней перми. Сопутствующая форма в Буку-Муренской степи и здесь на р. Томи—*Angaropteridium cardiopteroides* (Schmalh.) найдена кроме того в Тарбагатае в хребте Талогой на пр. бер. р. Тайджузген рядом с тем же *Psygmophyllum Potanini* Zal и *Voltzia heterophylla* Brongn., родом хвойных, в верхнем карбоне не обнаруженным до сих пор и признаваемым исключительно пермским и триасовым. В данном случае это особенно важный факт для определения возраста изучаемой флоры, так как образцы *Callipteris murenensis* Zal., до сих пор найденные, быть может, относятся и не к *Callipteris,* а к особому виду рода *Gondwanidium* с сильно расчлененною вайею и тогда теряют свое значение для определения возраста.



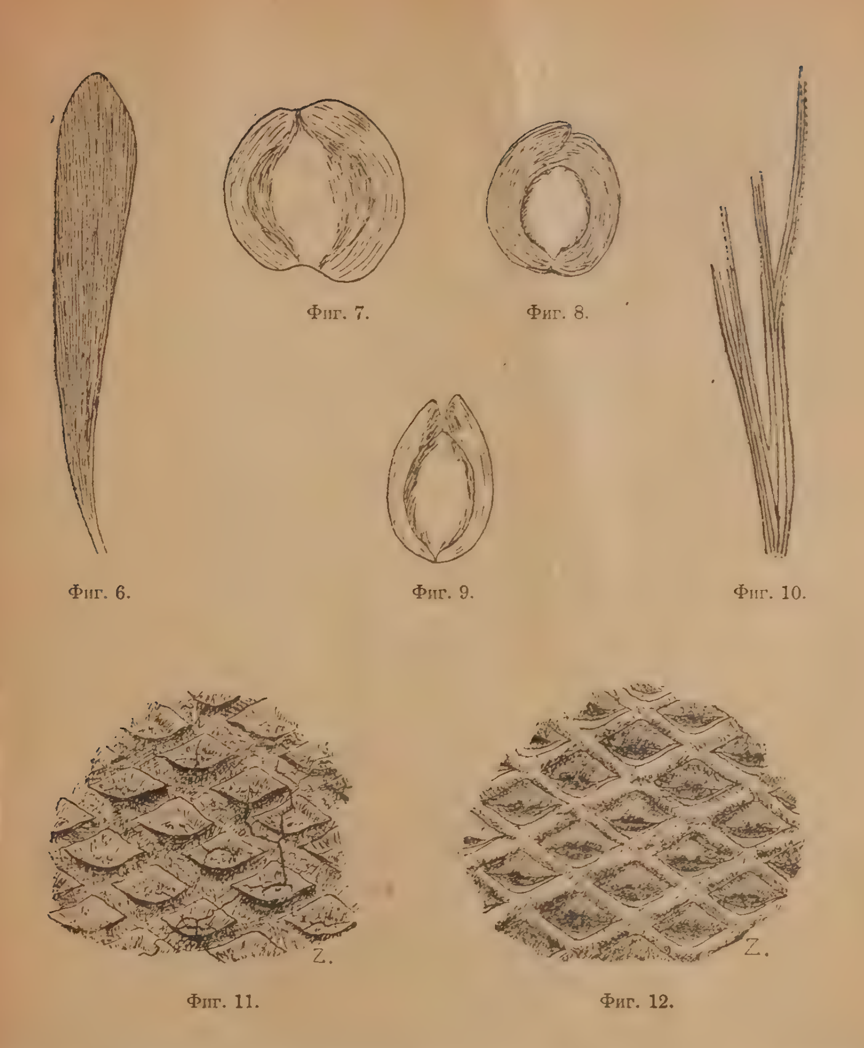
Фиг. 2.

Фиг. 3.

Фиг. 4.

Фиг. 5.

Фиг. 2. *Lepidodendron kirghizicum* Zal. Караганда, овраг к СЗ от Караганды. Нижний карбон × 2. — **Фиг. 3.** *Psygmophyllum Potanini* (Schmalhausen). Прав. бер. р. Томи в 9 м над пл. угля украинским. Старобалахонкинская подсвита Томьской свиты. 1 : 1. — **Фиг. 4.** *Psygmophyllum Potanini* (Schmalhausen). Пр. бер. р. Томи в 9 м над пластом угля украинским. Старобалахонкинская подсвита томьской свиты. 1 : 1. — **Фиг. 5.** *Psygmophyllum mongolicum* Zal. Прав. бер. р. Томи в 9 м над пластом угля украинским. Старобалахонкинская подсвита томьской свиты 1 : 1.



Фиг. 6. *Noeggerathiopsis Theodori* Tchirkova et Z. Прав. бер. р. Томи в 9 м над пластом угля украинским. Старобалахонкинская подсвита томьской свиты. 1 : 1. — **Фиг. 7.** *Rhabdocarpus tomiensis* Zal. Прав. бер. р. Томи в 9 м над пластом угля украинским. Старобалахонкинская подсвита томьской свиты. 1 : 1. — **Фиг. 8.** *Samaropsis moracia* Zal. Пр. бер. р. Томи в 9 м над пластом угля украинским. Старобалахонкинская подсвита томьской свиты. 1 : 1. — **Фиг. 9.** *Samaropsis siberiana* Zal. Пр. бер. р. Томи в 9 м над пластом угля украинским. Старобалахонкинская подсвита томьской свиты. 1 : 1. — **Фиг. 10.** *Dicranophyllum paulum* Zal. Пр. бер. р. Томи в 9 м над пластом угля украинским. Старобалахонкинская подсвита томьской свиты. × 2. — **Фиг. 11.** *Angarodendron Obrutchevi* Zal. Часть коры в рельефе × 3. Минусинский бассейн, окрестности г. Изых, конгломератовая свита Г. А. Иванова. — **Фиг. 12.** *Angarodendron Obrutchevi* Zal. Отпечаток части коры × 3. Минусинский бассейн, окрестности г. Изых, конгломератовая свита Г. А. Иванова.

Род *Dicranophyllum* хотя появляется уже в верхнем карбоне в stephanien, на границе его с westphalien, но достигает своего максимума развития только в нижней перми, где он в Приуралье представлен несколькими видами с широко-клиновидными, многократно-расчлененными листьями (*Dicranophyllym Tchernovi* Zal.), достигающими у некоторых видов большого размера (напр. у *Dicranophyllum bardense* Zal.). Во всяком случае, этот род столь же верхнекаменноугольный, сколько и нижнепермский. Следует прибавить, что род *Psygmophyllum*, понимаемый мною в узком значении, в смысле Saporta, является исключительно пермским, главным образом, повидимому, нижнепермским и известен только в Приуралье и в Северной Азии (Сибири и Монголии). В Азии он представлен своеобразными формами *P. mongolicum* Zal. и *P. Potanini* (Schmalh.), несколько отличными от форм приуральских. Во всяком случае связь этих азиатских растений с уральскими *Psygmophyllum* мыслится мне более реальной, чем с нижнекаменноугольными папоротниками рода *Rhacopteris*, куда Шмальгаузен поместил одно из этих растений. Говорить о систематическом положении рода *Psygmophyllum* в нашем смысле очень трудно. Мне кажется, что связь его, по облику листьев, с папоротниками рисуется определеннее, чем с салисбюриевыми. Вероятнее всего он относится к группе *Pteridospermae* (семенных папоротников).

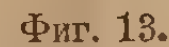
Следующая флора, которая сменяет только что упомянутую флору в угленосной антракалитовой серии Кузнецкого бассейна, выше по разрезу является тою, которая открыта на западном крыле бассейна в отроге ручья «Мосточки», притока р. Балахонки, на этой последней реке у дер. Барановой, на р. Чесноковке, в кровле пласта «1-го Мая», в Ишановой (Давыдовой) в геолого-разведочных канавах Алыкаевской толщи (в кровле пласта Нового), на пр. бер. р. Томи в 440 м выше балки Елыкаевой, а на восточном крыле бассейна на пр. б. р. Мунгата в отвалах работавших здесь некогда шахт, на пр. бер. р. Томи в 2 — 3 км выше дер. Ивановки, на левом берегу р. Заломной выше впадения в нее р. Мунашкиной и на юге бассейна выше Кузнецка на р. Солдатке против Улуса Чульджан. Характерными видами этой флоры является следующие: *Annularia asteriscus* Zal. (фиг. 13), *Phyllotheca deliquescens* (Goeppert), *Sphenophyllum denticulatum* Zal. (фиг. 14), *Sphenopteris eurina* Zal. (фиг. 15), *Sphenopteris izylensis* Zal. (фиг. 16), *Cardiopteris tomiensis* Zal. (фиг. 17),[1] *Nevropteris*

[1] Недавно Е. Ф. Чирковой обнаружен во флоре томьской свиты, с р. Изылы, еще новый представитель *Cardiopteris*, описанный ею под названием *Cardiopteris densa*, характерный основанием своих перышек с ушками и треугольною формою и густым жилкованием их (к краю перышка подходит на полусантиметр до 18 жилок).

siberiana Zal. (фиг. 18), *Angaropteridium cardiopteroides* (Schmalh.) (фиг. 19 и 20), *Angaropteridium laceratum* Zal. *Gondwanidium sibiricum* (Petunnikov) (фиг. 21), *Pecopteris angaridensis* Zal. (фиг. 22), *Pursongia asiatica* Zal. (фиг. 23), *Noeggerathiopsis Theodori* Tchirkova et Z. (фиг. 24), *Noegg. Tchirkovae.* Zal. *Noeggerathiopsis scalprata.* Zal., *Noeggerathiopsis gracilis* Zal., *Noeggerathiopsis subangusta* Zal. (фиг. 25), *Samaropsis Tchirkovaeana* Zal. (фиг. 26), *Samaropsis ungensis* Zal. (фиг. 27), *Samaropsis pauxilla* Zal. (фиг. 28), *Samaropsis ichanovensis* Zal. (фиг. 29), *Dicranophyllum paulum* Zal. f. *postera* Z. (фиг. 30), *Dicranophyllum gracilentum* Zal. (фиг. 31), *Ginkgophyllum Vsevolodi* Zal. (фиг. 32 и 33), и *Rhipidopsis tomiensis* Zal. (фиг. 34), *Gangamopteris* sp. и *Tchirkoviella sibirica* Zal. (фиг. 35).

Возраст этой флоры определяется целым рядом форм. Наиболее яркими показателями нижнепермского возраста ее являются такие формы, как *Ginkgophyllum Vsevolodi* Zal., *Rhipidopsis tomiensis* Zal. и *Pursongia asiatica* Zal. Несмотря на то, что все виды новые, сами роды говорят определенно за пермь. *Ginkgophyllum Grasseti* Saporta, ближайший родич *Ginkgophyllum Vsevolodi*, встречен в пермских отложениях Lodève во Франции среди ископаемой флоры, особенно богатой видами *Callipteris*. Кроме того, принадлежность *Ginkgophyllum Vsevolodi* к пермской флоре, а не к какой-либо другой, определяется нахождением этого вида в верхнепермских отложениях р. Печоры. Род *Rhipidopsis* исключительно пермский, и вид *tomiensis*, по характеру жилкования своего, довольно близкий к *Rhipidopsis ginkgoides* Schmalhausen. Род *Pursongia* определенно пермский, так как этот новый род создан мною для листьев облика *Glossopteris*, у которых между жилками с косвенными анастомозами замечаются штрихи, образованные оттиском на породе гиподермальных полосок. Основной вид этого рода *Pursongia Amalitzkii*, найденный в северодвинских верхнепермских осадках казанского или татарского яруса, был обнаружен недавно и в Приуралье на р. Сардыке и на р. Чаксе в казанском ярусе и в последнее время обнаружен в низах уфимского яруса верхней перми на р. Сакмаре (А. В. Хабаковым). *Pursongia asiatica* Zal., вид очень близкий к *Pursongia Amalitzkii* Zal. и отличается один от другого только мелкими деталями. *Pursongia* и *Glossopteris* относятся к вымершей группе голосеменных или птеридоспермных, так как недавно доказано вполне определенно, что остатки *Vertebraria*, считавшиеся корневищами *Glossopteris*, являются, если зависимость между ними не подлежит сомнению, побегами, на которых сидели эти листья, и эти побеги имели вторичную древесину из трахеид





Фиг. 13.



Фиг. 14.



Фиг. 15.



Фиг. 16.

Фиг. 13. *Annularia asteriscus* Zal. Дер. Ишанова, кровля пласта «Нового». Давыдовская подсвита томьской свиты 1 : 1. — **Фиг. 14.** *Sphenophyllum denticulatum* Zal. Прав. бер. р. Чесноковки, кровля пласта «1-го мая». Давыдовская подсвита томьской свиты. 1 : 1.— **Фиг. 15.** *Sphenopteris eurina* Zal. Близ дер Завьяловой на р. Изылы. Давыдовская подсвита томьской свиты. × 2. — **Фиг. 16.** *Sphenopteris izylensis* Zal. Близ дер. Завьяловвой на р. Изылы. Давыдовская подсвита томьской свиты. × 3.



Фиг. 17.



Фиг. 18.



Фиг. 19.



Фиг. 20.

Фиг. 17. *Cardiopteris tomiensis* Zal. Сланцы на пр. бер. р. Томи в 440 м выше балки Елыкаевой. Давыдовская подсвита томской свиты. 1 : 1. — **Фиг. 18.** *Nevropteris siberiana* Zal. Верховье р. Балахонки у дер. Барановой. Давыдовская подсвита Томской свиты 1 : 1. — **Фиг. 19.** *Angaropteridium cardiopteroides* (Schmalhausen). Дер. Ишанова, кровля пласта «Нового». Давыдовская подсвита томской свиты. 1 : 1. — **Фиг. 20.** *Angaropteridium cardiopteroides* (Schmalhausen). Судженка. Давыдовская подсвита томской свиты. 1 : 1.

с окаймленными многорядными порами, пробегаемую широкими и высокими сердцевинными лучами. *Pursongia asiatica* Zal. обнаружен мною в Кузнецком бассейне в двух местонахождениях: в логе «Мосточки» близ дер. С. Балахонки (в колл. Нейбург) и в кровле пласта «Нового» у дер. Ишановой (в колл. Фомичева). Разнообразие видов *Noeggerathiopsis* показывает, что такое обилие их могло существовать, судя по развитию каменноугольной флоры в Европе, только или в stephanien или в autunien. Присутствие во флоре двух *Dicranophyllum* говорит также за ту же альтернативу. *Annularia asteriscus* отличен от каменноугольных форм



Фиг. 21. *Gondwanidium sibiricum* (Petunnikov). Старая Балахонка, овраг «Мосточки». Давыдовская подсвита томьской свиты. 1 : 1.



Фиг. 22. *Pecopteris angaridensis* Zal. Д. Ишанова, кровля пласта «Нового». Давыдовская подсвита томьской свиты. 1 : 1.

Европы и, конечно, определять его как *Annularia microphylla* Sauveur, обычного вида westphalien, как это делает М. Ф. Нейбург, невозможно. Кузнецкий вид скорее всего примыкает к *Annularia gracilescens* Halle из флоры центрального Шанси в Китае, где этот вид обнаружен в Lower Shihhotse series, которая должна быть рассматриваема как нижняя пермь. Род *Sphenophyllum*, вообще говоря, род широко распространенный в каменноугольных отложениях, но переходит и в осадки пермской системы. Вид *Sphenophyllum denticulatum* совершенно отличен от каких-либо каменноугольных видов, и определение М. Ф. Нейбург названного вида как *Sphenophyllum* conf. *majus* (Bronn), конечно, совершенно невозможно.



Фиг. 23. *Pursongia asiatica* Zal. Дер. Ишанова, кровля пласта «Нового». Давыдовская подсвита томьской свиты. 1 : 1.

Фиг. 24. *Noeggerathiopsis Theodori* Tchirkova et Zal. Старая Балахонка, овраг «Мосточки». Давыдовская подсвита томьской свиты. 1 : 1.

Фиг. 25. *Noeggerathiopsis subangusta* Zal. Лев. бер. р. Северной Уньги. Дер. Черемичкина, Уньгинская подсвита кольчугинской свиты 1 : 1.



Фиг. 26.



Фиг. 27.



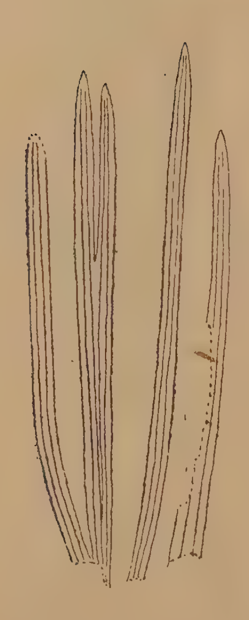
Фиг. 28.



Фиг. 29.



Фиг. 31.



Фиг. 30.

Фиг. 26. *Samaropsis Tchirkovaeana* Zal. Д. Старая Балахонка, овраг «Мосточки», Давыдовская подсвита томьской свиты. 1 : 1.

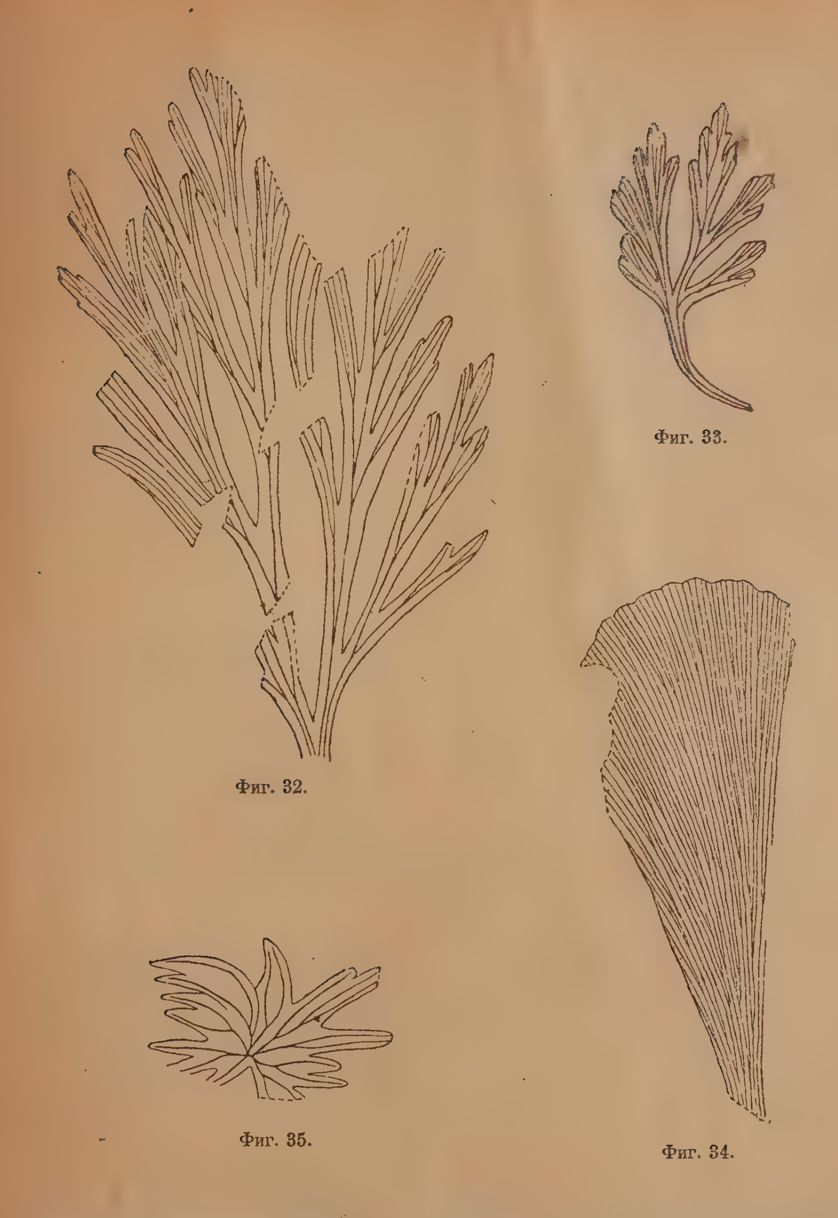
Фиг. 27. *Samaropsis ungensis* Zal. Лев. отрог оврага «Мосточки», притока р. Балахонки. Давыдовская подсвита томьской свиты. 1 : 1.

Фиг. 28. *Samaropsis pauxilla* Zal. Лев. отрог оврага «Мосточки» прит. р. Балахонки. Давыдовская подсвита томьской свиты. × 4.

Фиг. 29. *Samaropsis ichanovensis* Zal. Дер. Ишанова. Давыдовская подсвита томьской свиты 1 : 1.

Фиг. 30. *Dicranophyllum paulum* f. *postera* Zal. Дер. Старая Балахонка, овраг «Мосточки». Давыдовская подсвита томьской свиты. × 2.

Фиг. 31. *Dicranophyllum gracilentum* Zal. Дер. Завьялова на р. Изылы. Давыдовская подсвита томьской свиты. 1 : 1.



Фиг. 32. *Ginkgophyllum Vsevolodi* Zal. Прав. бер. р. Томи в 3 кил. выше дер. Ивановки. Давыдовская подсвита томьской свиты. 1 : 1. — **Фиг. 33.** *Ginkgophyllum Vsevolodi* Zal. Прав. бер. р. Чесноковки, кровля пласта «1-го Мая». Давыдовская подсвита томьской свиты. 1 : 1. — **Фиг. 34.** *Rhipidopsis tomiensis* Zal. Дер. Старая Балахонка, овраг «Мосточки». Давыдовская подсвита томьской свиты. 1 : 1. — **Фиг. 35.** *Tchirkoviella sibirica* Zal. Дер. Старая Балахонка, овраг «Мосточки». Давыдовская подсвита томьской свиты. × 2.

Присутствие *Sphenopteris* не может говорить против перми, так как этот вид жилкования папоротников переходит в пермь и выше. Конечно, сравнение *Sphenopteris eurina* Zal. с *Sphenopteris* aff. *Laurenti* Andrae, делаемое М. Ф. Нейбург, не делает его вестфальским видом, каким является последний и не служит при таком сравнении его доказательством верхнекаменноугольного возраста заключающих его слоев, как это вытекает по мнению М. Ф. Нейбург. Еще меньше, чем род *Sphenopteris*, может говорить абсолютно за карбон род *Nevropteris*, представленный такими формами, как *Nevropteris siberiana* Zal. и *Nevropteris dichotoma* Neuburg. Перышки первого по жилкованию своему примыкают к пермскому виду *Nevropteris densinervosa* Zalessky (= *Nevropteris cordata* Brongn., f. *densinervia* Grigoriev). Очень интересно нахождение в этой флоре *Cardiopteris tomiensis* Zal., так как *Cardiopteris* обычно считается родом нижнекаменноугольным. Но мы должны в этом отношении напомнить, что тип жилкования *Cardiopteris* встречается не только в низах карбона, но и на рубеже верхнего карбона и перми, так как у указанного выше *Nevropteris densinervosa* Zal. из Донецкого бассейна, открытого там в калиново-мироновской серии,[1] жилкование настолько кардиоптероидно, что возникает вопрос, куда было бы более целесообразным поместить этот вид, в род ли *Nevropteris* или *Cardiopteris*. Совокупность данных, доставленных ископаемою флорою, говорит таким образом ясно за нижнепермский возраст ее, а этим определяется и возраст заключающей ее свиты. Новое растение *Tchirkoviella sibirica* Zal. мною предположительно относится к папоротникам *Hymenophyllaceae* и напоминает своими листочками вайи *Trichomanes parvulum* Poir. Кроме перечисленных форм, характеризующих только что изученную флору, надо упомянуть еще *Sphenopteris odontopteroides* Zal., встреченный один раз в песчаниках с. Змеинки на пр. бер. р. Томи, которые ошибочно сопоставляются П. И. Бутовым и В. И. Яворским с безугольною свитою. Они не могут быть сопоставлены ни с одним песчаником на западном крыле бассейна в серии осадков с той же самой ископаемой флорой и характером своим нисколько не напоминают серых песчаников безугольной свиты Кузнецкого района.

Комплекс слоев от конгломерата до песчаников, непосредственно налегающих на третью пачку строительных песчаников, как определенно каменноугольного возраста в своей нижней части, я выделяю в особую *острогскую* свиту, называемую так потому, что эта свита хорошо развита

[1] М. Д. Залесский и Е. Ф. Чиркова. Об установлении калиново-мироновской серии в разрезе каменноугольных осадков Донецкого бассейна. Тр. Геол. инст. АН СССР, т. II, 1932.

на р. Томи у села Острога (с. Верхотомского), где ее лучше всего изучать по р. Чесноковке в устье ее и по р. Томи от Острога до дер. Евсеевой. Она хорошо развита также у Мозжухи на левом берегу р. Томи, откуда у меня имеется из этой свиты отпечаток коры *Lepidodendron*. Весь комплекс слоев условно от третьей пачки строительных песчаников, а собственно с фактами в руках, с первых нижних пластов угля Балахонского района до надкемеровской песчано-сланцевой свиты П. И. Бутова и В. И. Яворского, т. е. кончая надкемеровским пластом угля, я выделяю в особую свиту *томъскую*, называемую так потому, что она прекрасно представлена на р. Томи от с. Балахонки до г. Щегловска (Кемеровска).

В некоторых местах ее развития она хорошо охарактеризована кусками древесины, а иногда целыми древесными стволами, лишенными коры, принадлежащими *Dadoxylon mungaticum* Zal. Эта древесина является обычною в томской свите, особенно на восточном крыле Кузнецкой котловины на р. Мунгате, на р. Томи, выше Ивановки, и на р. Томи на протяжении от р. Грязной до р. Граматухи и несколько ниже.

В томской свите некоторые угли заключают участки минерализованного материнского вещества угля, о которых речь будет в другой работе. Все они минерализованы, как и вышеупомянутая древесина и деревья, главным образом, кремнеземом. Это очень важное обстоятельство, которое можно использовать с большою пользою для стратиграфии, так как такие же участки материнского вещества углей, имеющиеся в вышележащей свите, о которых будет речь ниже (в кольчугинской), минерализованы исключительно углекислым кальцием. Тем же веществом минерализована и попадающаяся в кольчугинской свите древесина, принадлежащая, в противоположность древесине в томской свите, к другому виду кордаит *Mesopitys Tchihatcheffi* (Goeppert) Zalessky. Эта последняя древесина начинает попадаться уже в верхних частях вертикального распределения или развития той флоры, которая была приведена перед этим. С появления именно этой последней древесины начинается мною вышележащая за томской кольчугинская свита. Такое появление имеет место в д. Черемичкиной, где эта древесина находится in situ в сланцах лев. бер. р. Уньги недалеко от места, где в вышележащих сланцах, ниже по реке, встречается флора верхов томской свиты. Здесь обычно находятся *Angaropteridium cardiopteroides* (Schmalh.), *Gondwanidium sibiricum* (Petunnikov), *Noeggerathiopsis Theodori* Tchirkova, *Noeggerathiopsis subangusta* Zal. (фиг. 25), *N. denticulata* Zal. и *Ginkgophyllum Vsevolodi* Zal. Отсюда описаны мною следующие насекомые: *Phylloblatta sibirica* Zal., *Caenoblatta angaridensis* Zal., *Parapanorpa*

ungensis Zal., *Tchirkovaea guttata* Zal., и *Philiasptilon maculosum* Zal., а А. В. Мартыновым *Ungoneurites paucinervis* Mart.

Древесина *Mesopitys Tchihatcheffi* обнаружена мною также и в песчаниках над кемеровским пластом угля на пр. бер. р. Томи. Очень интересно здесь отметить обнаружение мною и Е. Ф. Чирковой этой древесины и на Тыргане, недалеко от с. Прокопьевского в железнодорожной выемке, относительно близко от конгломерата на западном крыле имеющейся здесь небольшой антиклинальной складки. Минерализация этих трех упомянутых древесин *Mesopitys Tchihatcheffi* (Goeppert) Zal. в Черемичкине, в песчаниках над кемеровским пластом и на Тыргане произошла кремнеземом, т. е. так же, как произошла минерализация *Dadoxylon mungaticum* Zalessky из томской свиты.

Нахождение древесины *Mesopitys Tchihatcheffi* (Goeppert) Zal. на Тыргане — факт большого значения. Он, в связи с другими фактами, о которых будет речь впереди, указывает, что та свита пород, которая развита в присалаирской полосе у Афонина, Прокопьевского и других мест, выделяемая мною в особую свиту абинскую, моложе большей части томской свиты, и что конгломерат в ядре антиклинальной складки в упомянутой железнодорожной выемке, вероятно, не отвечает по возрасту конгломерату или конгломератам у д. С. Балахонки и дер. Подъяковой, с которых начинают П. И. Бутов и В. И. Яворский свою балахонскую свиту. Во всяком случае слои пород, покрывающие этот конгломерат Тыргана, принадлежат значительно более поздней эпохе отложения, и в присалаирской полосе был длительный перерыв в отложениях осадков. Этот перерыв отвечает времени отложения в северной части бассейна значительной части томской свиты, за исключением, быть может, самых верхов ее, так как на р. Уре, недалеко от конгломерата, мы с Е. Ф. Чирковой находили растительные остатки томской свиты: *Angaropteridium cardiopteroides* (Schmalhausen), а также *Noeggerathiopsis Theodori* Tchirkova.[1] Вся томская свита подразделяется

[1] Подобный же интересный факт близкого нахождения к «базальному конгломерату» Бутова и Яворского более молодых слоев с флорою давыдовской подсвиты томской свиты обнаружила недавно Е. Ф. Чиркова и на реке Кóндоме немного ниже Улуса Чуян (на прав. бер. р. Кóндомы выше впадения в нее р. Басмалы) по коллекции, привезенной оттуда Яворским и Савченко. Она констатировала в этом местонахождении следующие формы: *Phyllotheca deliquescens* (Goeppert), *Gondwanidium sibiricum* (Petunnikov), *Angaropteridium cardiopteroides* (Schmalhausen) и *Noeggerathiopsis Theodori* Tchirkova. В присалаирской полосе таким образом и на р. Кóндоме отсутствует нижняя подсвита томской свиты, старобалахонкинская, видимо здесь не отлагавшаяся или отложившаяся, но потом размытая. Но здесь, кажется, имеются песчаники нижнекарбонового возраста, непосредственно находящиеся над конгломератом, так как Нейбург обнаружила здесь, если нет здесь ошибки, *Caenodendron*, род, найденный в нижнем карбоне.

мною на две подсвиты: нижнюю с *Psygmophyllum Potanini* (Schmalhausen) и *Ps. mongolicum* Zal. и верхнюю с *Ginkgophyllum Vsevolodi* Zal. и *Gondwanidium sibiricum* (Petunnikov). Нижнюю я называю *старобалахонкинскою,* а верхнюю — *давыдовскою.* Граница между ними проходит выше песчаников с волноприбойными знаками кузнецких геологов приблизительно по линии Александровского пласта угля на рч. Чесноковке, так как последние *Psygmophyllum* мною наблюдались на левом берегу рч. Чесноковки против устья Макеевки. Название старобалахонкинская дается потому, что хороший разрез этой нижней подсвиты развит у дер. Старой Балахонки на р. Томи, а название давыдовская устанавливается по дер. Давыдовой (Ишановой) под Щегловском, где В. Д. Фомичевым производились геолого-разведочные работы на эту подсвиту, и где им был записан впервые точный разрез ее по проведенным здесь канавам. Непосредственно на томьскую свиту в Щегловском районе залегает песчано-сланцевая толща по подсчету П. И. Бутова и В. И. Яворского около 1150 м, которую они выделяют в надкемеровскую свиту, а на последнюю толща серых песчаников до 1500 м, известных под названием красноярских. Эти красноярские песчаники теми же исследователями выделяются в красноярскую свиту. Эти обе толщи развиты и в Кузнецком районе и в Чертинском, но в несколько иной последовательности пород, и ошибочно отнесены П. И. Бутовым и В. И. Яворским к безугольной или пустопорожней свите, предполагавшейся тогда в Щегловском районе непосредственно над балахонской свитой. Эти две рассматриваемые свиты я соединяю в один комплекс под названием уньгинской или северо-уньгинской подсвиты, названной так потому, что она хорошо развита на р. Северной Уньге у д. Черемичкиной и д. Салтыковой и протягивается с этих мест к северу к Кемеровой и Красному яру на прав. берег р. Томи, а также на юг, приблизительно по направлению к Червякам. К этой подсвите я присоединяю ту толщу сланцев в Черемичкиной, где была обнаружена древесина *Mesopitys Tchihatcheffi* (Goeppert) Zal. и рядом с ней в свое время открыта А. А. Снятковым флора давыдовской подсвиты томьской свиты, о которой я упоминал выше. В надкемеровской песчано-сланцевой толще я ничего не находил из отпечатков растений, но древесина из песчаников над кемеровским пластом, исследованная мною, показала принадлежность ее к *Mesopitys Tchihatcheffi* (Goeppert) Zalessky. В красноярских песчаниках и их аналогах, в песчаниках Бурлыковой и в песчаниках Букиной на р. Кондоме и в других местах развития их были находимы отпечатки листьев *Noeggerathiopsis candalepensis* Zal. и *Callipteris Zeilleri* Zal., характерные растения кольчугинской свиты. Кроме того,

в карьерах песчаников той же толщи на левом берегу р. Ближняго Шарапа было найдено несколько кусков древесины *Mesopitys Tchihatcheffi* (Goeppert) Zal. Нахождение этих трех растений в уньгинской подсвите говорит за необходимость отнести ее по флоре к тому же комплексу слоев, который развит в Кольчугине и который занимает в серии антраколитовых угленосных осадков Кузнецкого бассейна самое высокое стратиграфическое положение. Эту всю толщу, охарактеризованную кольчугинскою флорою, я называю *кольчугинской* свитою и разделяю ее уже на основании нефлористических признаков на две подсвиты: нижнюю *уньгинскую* без углей, о которой шла речь выше, отложившуюся в морской лагуне в период особенно сильной денудации в окрестной сильно поднявшейся стране, и верхнюю *иньскую* с углями. Эта последняя соответствует более покойному периоду отложения осадков в той же лагуне, когда эта последняя, многократно заполняясь вся или частично, могла делаться по временам сушею и покрываться более или менее заболоченными лесами с образованием на ней обширных торфяников. Эта иньская подсвита соответствует подкемеровской свите П. И. Бутова и В. И. Яворского в центральной и южной частях бассейна. Название иньской эта подсвита получает потому, что она хорошо развита вдоль реки Ини во многих местах центральной части бассейна и здесь была впервые изучена со стороны ископаемой флоры. Это название ей дается потому, что старое название ее кольчугинская, данное мною ей как свите на основании палеоботанических данных, должно быть дано по этим же данным, как мы видели, бо́льшей толще, обнимающей не только ее, но и подстилающую ее уньгинскую. Характерною особенностью кольчугинской свиты служит обилие в ней древесины *Mesopitys Tchihatcheffi*, встречающейся как в уньгинской подсвите, так, в особенности, в иньской. Для последней подсвиты характерно, кроме того, присутствие значительных залежей каменных углей с сохраненными в них участками их материнского вещества и целых слоев ископаемых торфяников, захваченных минерализациею углекислым кальцием прежде, чем они могли превратиться в каменный уголь. Флора кольчугинской свиты заключает следующие виды: *Paracalamites robustus* Zal. (фиг. 36), *Lobatannularia Schtschurowskii* (Schmalhausen) (фиг. 37, 38), *Phyllotheca deliquescens* (Goeppert), *Pecopteris anthriscifolia* (Goeppert), *P. uskatensis* Zal. (фиг. 39), *Pecopteris* (*Cladophlebis*) *tychtensis* Zal. (= *Sphenopteris imbricata* Goeppert) (фиг. 40 и 41), *Pecopteris synica* Zal. (фиг. 42), *Caractchetopteris superba* Zal. (фиг. 43), *Callipteris Zeilleri* Zal., *C. altaica* Zal., *Iniopteris sibirica* Zal., *Syniopteris siberiana* Zal., *Tychtopteris cuneata* (Schmalh.)

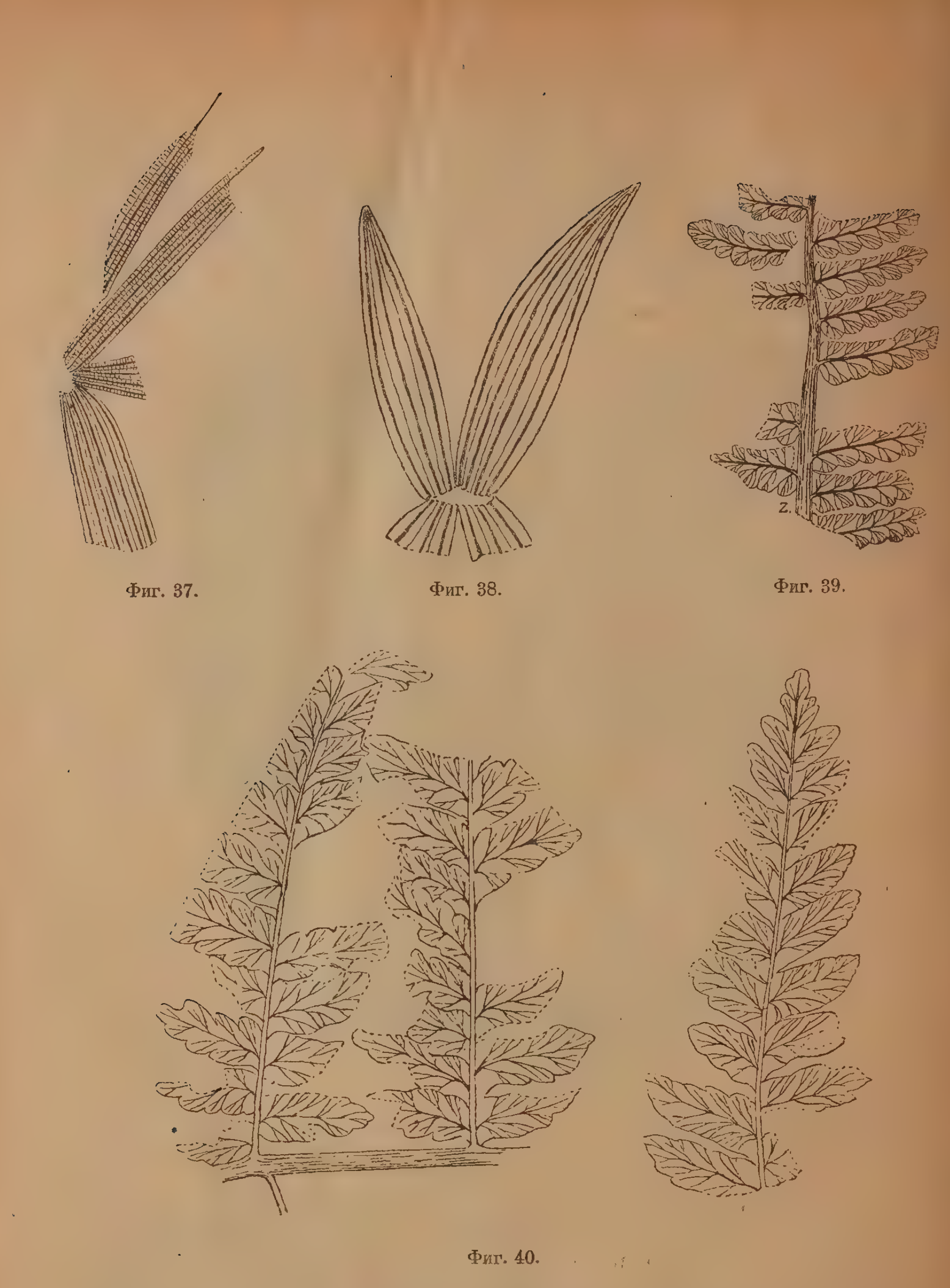
(фиг. 44 и 45), *Noeggerathiopsis distans* (Goeppert), *Noegg. aequalis* (Goepp.), *Noegg. candalepensis* Zal., *Mesopitys Tchihatcheffi* (Goepp.) Zal., *Rhipidopsis palmata* Zal. (фиг. 46), и *Ginkgoites antecedens* Zal. (фиг. 47).

Из этого списка ясно, что мы имеем здесь верхнепермскую флору, очень близкую к флоре бассейна р. Печоры, на родство с которой указы-



Фиг. 36. *Paracalamites robustus* Zal. Лев. бер. р. Томи, дер. Ерунакова, над пластом угля $\times$ 4. Иньская подсвита кольчугинской свиты. 1 : 1.

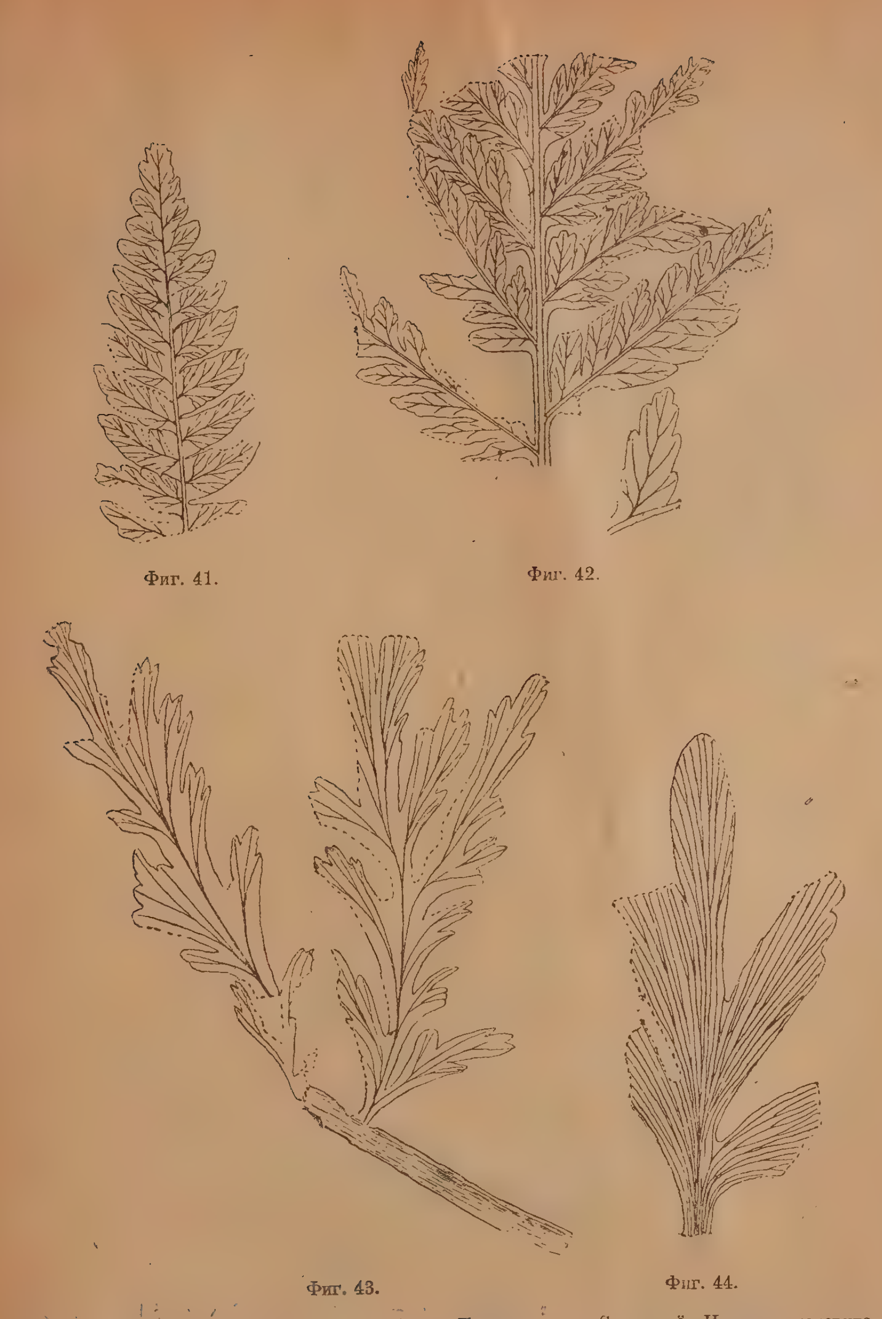
вают общие формы *Lobatannularia Schtschurowskii* (Schmalhausen), *Pecopteris anthriscifolia* (Goeppert) и очень близкие для обеих флор формы *Noeggerathiopsis*, оригинальный род *Iniopteris*, близкий к роду *Syniopteris* с р. Б. Сыни и наконец роды *Syniopteris Rhipidopsis*. Кроме этих форм, в песчаниках реки Егозихи в иньской подсвите было найдено В. И. Яворским в 1931 г. несколько небольших стволиков папоротника из сем. *Osmundaceae*, близкого к роду *Thamnopteris*, который описывается мною



Фиг. 37. Фиг. 38. Фиг. 39.

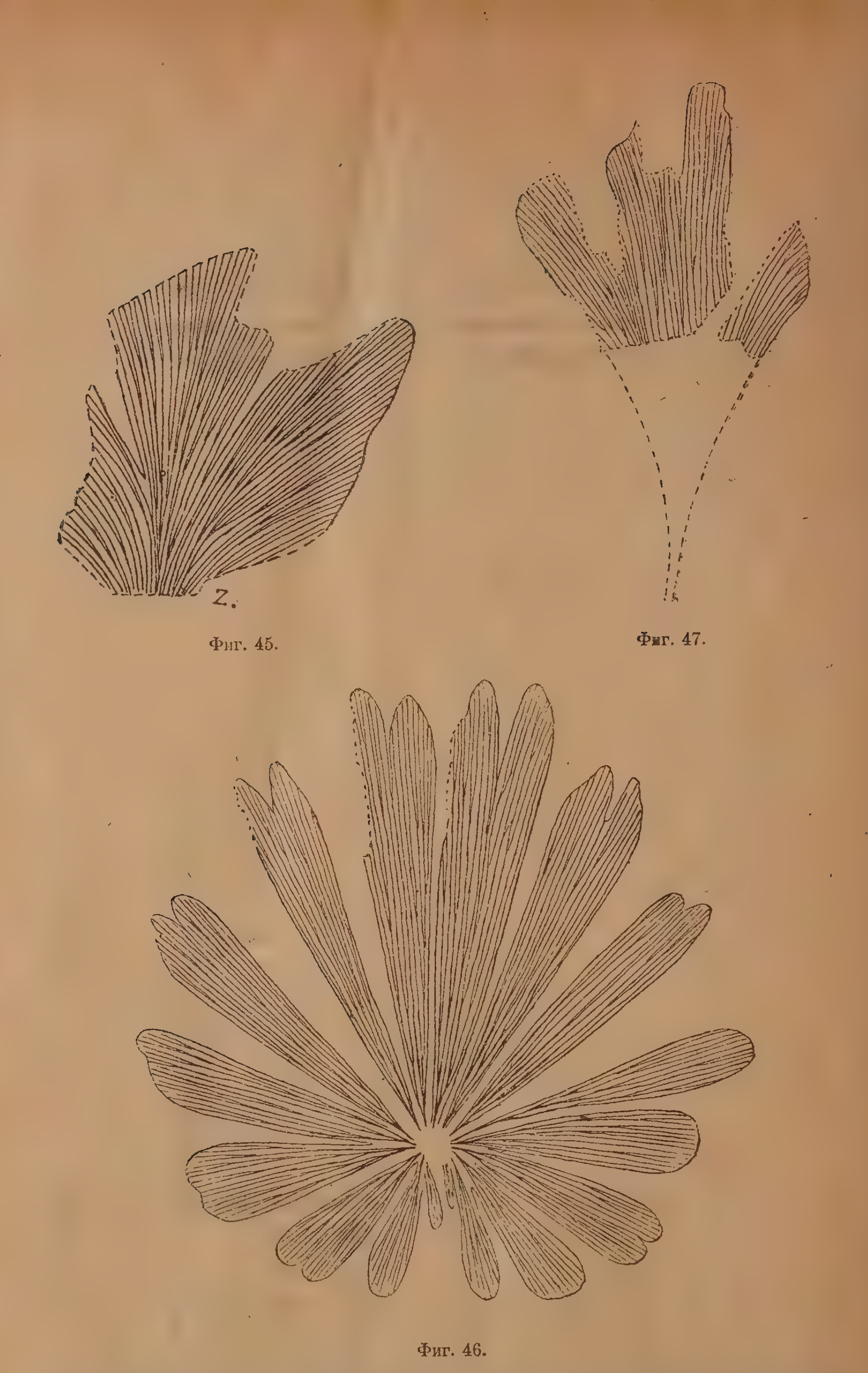
Фиг. 40.

Фиг. 37. *Lobatannularia Schtschurowskii* (Schmalhausen). На р. Ускате ниже села Сергеева. Кольчугинская свита 1 : 1. — **Фиг. 38.** *Lobatannularia Schtschurowskii* (Schmalhausen). На р. Ускате ниже села Сергеева. Кольчугинская свита. $\times$ 2. — **Фиг. 39.** *Pecopteris uskatensis* Zal. Прав. бер. р. Уската, дер. Иганина. Иньская подсвита кольчугинской свиты. 1 : 1. — **Фиг. 40.** *Pecopteris tychtensis* Zal. Пр. бер. р. Тыхты у дер. Соколовой. Иньская подсвита кольчугинской свиты. 1 : 1.



Фиг. 41. Фиг. 42. Фиг. 43. Фиг. 44.

Фиг. 41. *Pecopteris tychtensis* Zal. Пр. бер. р. Тыхты у дер. Соколовой. Иньская подсвита кольчугинской свиты. 1 : 1. — **Фиг. 42.** *Pecopteris synica* Zal. Пр. бер. р. Тыхты у дер. Соколовой. Иньская подсвита кольчугинской свиты. 1 : 1. — **Фиг. 43.** *Caractchelopteris superba* Zal. Прав. бер. р. Тыхты у дер. Соколовой. Иньская подсвита кольчугинской свиты. 1 : 1. — **Фиг. 44.** *Tychtopteris cuneata* (Schmalhausen) Zal. Пр. бер. р. Тыхты у дер. Соколовой. Иньская подсвита кольчугинской свиты. 1 : 1.



Фиг. 45. Фиг. 47.

Фиг. 46.

Фиг. 45. *Tychtopteris cuneata* (Schmalhausen) Zal. Лев. бер. р. Томи у дер. Ерунакова, над пластом 18. Иньская подсвита кольчугинской свиты. 1 : 1. — **Фиг. 46.** *Rhipidopsis palmata* Zal. Пр. бер. р. Тыхты у дер. Соколовой. Иньская подсвита кольчугинской свиты. × 2. — **Фиг. 47.** *Ginkgoites antecedens* Zal. Пр. бер. р. Тыхты у дер. Соколовой. Иньская подсвита кольчугинской свиты. 1 : 1.

в особой статье под новым родовым названием *Iegosigopteris*. Это нахождение нового осмундового папоротника очень знаменательно, как очевидное указание на то, что определение мною возраста для кольчугинской свиты как верхнепермского совершенно правильно, а это обстоятельство, с своей стороны, подтверждает правильность постепенно сменяющую ее к низу свиту томскую считать за нижненепермскую, как это признается мною и Е. Ф. Чирковой[1] на основании анализа свойственной ей флоры, несмотря на присутствие в ней ряда форм как будто бы по облику каменноугольных. Таким образом, предположение видеть в указанных мною пермских формах томской свиты только предвозвестников пермской флоры в сообществе верхнекаменноугольной флоры не может быть принято, и эти верхнекаменноугольные типы должны быть разсматриваемы в ней не более и не менее, как остатки более древней вымирающей флоры среди пришедшей ей на смену новой. Такими же доживающими типами мы признали и *Tchirkovaea guttata* Zal. и *Philiasptilon maculosum* из *Megasecoptera* среди уньгинской энтомофауны, получившей свой пермский характер появлением в ней *Homoptera* и *Mecoptera*. Что кольчугинская свита является свитою верхнепермской, а не нижнепермской, лишний раз говорит находка в этой свите новой древесины, родственной *Caenoxylon Scotti* Zal., характерного растения артинских отложений Приуралья, у которой, при сходстве ее анатомического строения вторичной древесины с этой формой, нет даже намеков на пучки первичной ксилемы, столь характерные для *Caenoxylon Scotti* Zal. Такая древесина с утратою пучков первичной ксилемы могла появиться только позднее *Caenoxylon Scotti* Zal., как нисходящая ее филогенетическая ветвь. Эту новую древесину, найденную близ мельницы д. Драчениной, я называю *Metacaenoxylon Carpentieri* Zal. За то, что кольчугинская свита является свитою верхнепермскою, а томьская нижнепермскою, говорит отсутствие в последней такой формы, как *Pecopteris anthriscifolia* Goeppert при наличии и распространенности ее в кольчугинской свите и верхнепермских слоях Печорского бассейна. Этот папоротник, как показал R. Zeiller, тождествен с европейским нижнепермским видом *Pecopteris leptophylla* Bunbury, который мог перебраться при переселении своем постепенно на восток с Атлантического материка на Ангариду только с середины пермского времени, передвигаясь в Азию (в Кузнецкий бассейн, а также в Китай) через Урал, где

[1] Е. Ф. Чиркова. К стратиграфии угленосных отложений Кузнецкого бассейна и о *Noeggerathiopsis Theodori* n. sp., характерном кордаите томской свиты. Изв. Союзгеоразведки, 1932.

он появляется только с верхов артинского яруса и становится обычным там в верхнепермских слоях Печоры, отвечающим вероятно по возрасту камскому ярусу Прикамья. Действительно, мы увидим его в Кузнецком бассейне только с абинской свиты, которая занимает, повидимому, промежуточное положение между томской и кольчугинской свитами или соответствует самой верхней части первой.

Нахождение в кольчугинской свите древесины *Mesopitys Tchihatcheffi* в кальцифированном виде и большое количество в угольных пластах известковых конкреций с сохранением в них материнского вещества угля и целые залежи минерализованных таким же образом торфяников указывают на то, что осадки кольчугинской свиты были при отложении их под влиянием морской воды, подходившей близко к болотистым торфяникам, где гибли деревья, так как такое общее кальцифирование торфяников и древесины при других условиях было бы, на мой взгляд, необъяснимым. Таким образом, теперешние каменноугольные залежи иньской подсвиты кольчугинской свиты представляли собою раньше громадные по площади лесные торфяники прибрежной полосы морской лагуны или лагун, находившихся в течение долгого периода под влиянием то надвигавшегося, то отходившего на континент моря. Что касается уньгинской подсвиты с ее мощными песчаниками, то они зародились на дне более продолжительно в то время существовавшего моря, куда сносились с берегов большие массы крупного кластического материала, как следствие сильного поднятия к тому времени соседних к нему гор и возвышенностей.

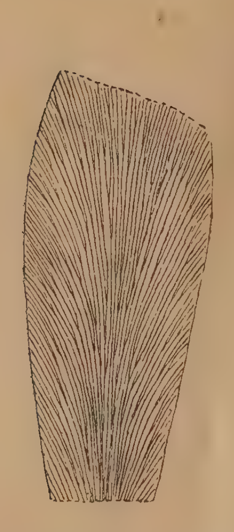
Томская свита отлагалась также в прибрежной полосе лагуны, но, вероятно, пресноводной, куда морская вода не имела доступа, и минерализация погребенных торфяников и деревьев происходила под влиянием кремнезема, выделявшегося из горячих источников, которые должны были существовать в окрестных горах и изливаться в лагуну, пробегая на пути своем торфяники. Возможно даже, что в горах в то время происходила некоторая вулканическая деятельность.

Климат во время отложения, как томской, так и кольчугинской свит, был умеренный с отчетливо выраженными сменами времен года. За это говорит присутствие ясных годичных колец у деревьев углеобразователей *Mesopitys Tchihatcheffi* (Goeppert) и *Dadoxylon mungaticum* Zal., а также состав лесной подстилки в лесных торфяниках, составленной исключительно почти из листьев разнообразных *Noeggerathiopsis*, которые были опадающими и делали возможным в короткий относительно срок своим скоплением образовать в лесу мощные торфяники, превратившиеся в угольные залежи

большой мощности. Опадающий характер этих листьев, кроме того, становится очевидным также из факта довольно частого нахождения среди отпечатков растений из Кузнецкого бассейна небольших чешуевидных листочков *(Lepeophyllum)*, которые так напоминают своим характером почковые чешуи современного *Ginkgo*, что нет сомнения, что при жилковании их, схожем с жилкованием *Noeggerathiopsis*, должны быть признаны ничем иным, как почковыми чешуями последних.

Факт существования годичных колец в деревьях, находимых в томской и кольчугинской свитах, может быть использован как лишний аргумент за пермский их возраст, так как в каменноугольную эпоху годичные кольца в деревьях, как правило, отсутствовали. Первое появление слабо выраженных годичных колец в древесинах Донецкого бассейна имеет место только с нижних слоев нашей калиново-мироновской серии (выше известняка P_4), относимой мною и Е. Ф. Чирковой на основании ископаемой флоры этой серии к нижней перми. Древесины же из свиты $C_3{}^3$, т. е. из стефанского яруса, как правило, без годичных колец, из чего мы заключаем, что флора этого времени карбона произрастала в теплом климате, при котором смены времен года были постепенны. На Урале уже в артинских слоях наблюдается древесина только с годичными кольцами, а о древесине с ними в вышележащем ярусе камском (казанском и уфимском Нечава) говорить уже не приходится. Таким образом, появление годичных колец в древесине совпадает по времени как в Приуралье и в Донецком бассейне, так и в Кузнецком, если признать за томской свитою последнего нижнепермский возраст. Если же представить себе возраст ее верхнекаменноугольным, то тогда возникает вопрос, чем объяснить такое раннее появление годичных колец в Кузнецком бассейне в период, когда везде на земле, где этот период изучался, такого явления не наблюдалось. Мне кажется, что второе допущение становится при этом мало правдоподобным. В присалаирской полосе, по р. Абе, по притокам Ускатов и по р. Бачату, развита толща пород, относимая П. И. Бутовым и Б. И. Яворским к их балахонской свите, в которой обычными являются некоторые растения кольчугинской свиты на ряду с формами томской свиты. Из растений кольчугинской свиты здесь обычна *Lobatannularia Schtschurowskii* (Schmalhausen) и изредка попадается *Pecopteris anthriscifolia* (Goeppert) и найдена недавно типичная древесина *Mesopitys Tchihatcheffi* (Goeppert). Это обстоятельство очень важно как указание, что эта свита пород, которую я и Е. Ф. Чиркова называем абинскою свитою, представляет собою какую-то иную свиту, чем томская, и является несколько более молодой, чем она, и, вероятно, соответ-

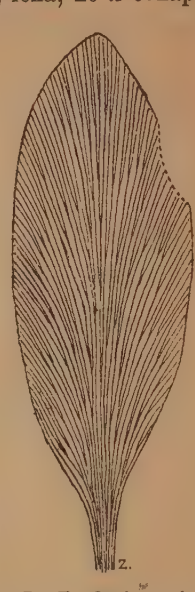
ствует только небольшому участку верхней части томской свиты, флора которой ускользнула от нашего наблюдения в виду небольшой мощности осадков, где она могла быть похороненной. Это как будто подтверждается тем, что *Lobatannularia Schtschurowskii* (Schmalh.) была обнаружена, по указанию М. Ф. Нейбург, и в Щегловском районе в самых верхах томской свиты. Флора абинской свиты еще недостаточно изучена, но я обнаружил



Фиг. 48. *Petcheria tugajensis* Zal. Лев. бер. р. Тугая, первая канава выше Соколиных гор. Село Афонино. Абинская свита. 1 : 1.



Фиг. 49. *Gangamopteris kyzylgaica* Zal. Поперечная Гора на реке Кызылгае выше дер. Черепановой. Абинская свита. 1 : 1.



Фиг. 50. *Petcheria tomiensis* Zal. Лев. бер. р. Томи, Ерунакова, над пластом угля 18. Иньская подсвита кольчугинской свиты. 1 : 1.

в ней интересные виды растений *Petcheria tugajensis* Zal. (фиг. 48) и *Gangamopteris kyzylgaica* Zal. (фиг. 49). Нахождение этих родов растений лишний раз подтверждает правильность отнесения абинской свиты к средней перми. Род *Petcheria* открыт мною в верхнепермских отложениях бассейна р. Печоры,[1] а род *Gangamopteris*, по крайней мере в Европе, настоящий верхнепермский род, так как найден в верхнепермских слоях Адзьвы в бассейне р. Печоры. Интересно отметить нахождение в абинской свите *Pyllopitys Heeri* (Schmalh.) Zal., т. е. того растения, которое было найдено на

[1] Новый представитель этого рода *Petcheria tomiensis* (фиг. 50) был мною недавно обнаружен также и в кольчугинской свите в Ерунаковой, в коллекции ископаемых растительных остатков, собранных геологом Самылкиным.

Щегловский или Кемеровский район	Возраст	Свиты	Подсвиты	Характеристика по ископаемой флоре		Кольчугинский район, Присалаирская полоса и Кузнецкий район	
Свиты по П. И. Бутову и В. И. Яворскому	по М. Д. Залесскому			по М. Д. Залесскому		Свиты и подсвиты по М. Д. Залесскому	Свиты по П. И. Бутову и В. И. Яворскому
	Верхняя пермь	Кольчугинская	Иньская с углем	*Mesopitys Tchihatcheffi* (Goeppert) Z.	*Lobatannularia Schtschurowskii* (Schmalh.), *Pecopteris anthriscifolia* (Goeppert), *Callipteris Zeilleri* Zal., *C altaica* Z. *Iniopteris sibirica* Zal., *Syniopteris siberiana* Zal., *Tychtopteris cuneata* (Schmalh.), *Rhipidopsis palmata* Z., *Noeggerathiopsis aequalis* (Goepp.), *N. candale pensis* Zal.	Иньская подсвита с углем	Подкемеровская свита
Красноярская Надкемеровская			Уньгинская без угля		*Callipteris Zeilleri* Zal., *Noeggerathiopsis candalepensis* Zal. Доживание флоры давыдовской подсвиты	Уньгинская подсвита без угля	Безугольная или пустопорожняя свита
Кемеровская Подкемеровская Безугольная	Нижняя пермь	Томская	Давыдовская с углем	*Dadoxylon mungaticum* Zal.	*Angaropteridium cardiopteroides* ((Schmalh.) *Gondwanidium sibiricum* Petunnikov) *Ginkgophyllum Vserolodi* Zal., *Noeggerathiopsis Theodori* Tchirkova, *Pursongia asiatica* Zal. *Rhipidopsis tomiensis* Z.	Абинская свита с углем	
Балахонская			Старобалахонкинская с углем		*Psygmophyllum mongolicum* Zal. *Ps. Potanini* (Schmalh.), *Noeggerathiopsis Theodori* Tchirkova и *Angarodendron Obrutchevi* Zal.		Балахонская свита
	Карбон	Острогская	без угля		Перерыв палеонтологической летописи. *Cardiopteris vesca* Zal. *Lepidodendron* typ. *Veltheimi* St., *Demetria* sp. *Sigillaria* (*Rhytidolepis*) sp.		

р. Суке во флоре Н. Тунгузки совместно с *Gangamopteris glossopteroides* (Schmalh.), *Ginkgopsis Czekanowskii* (Schmalhausen) Zal. и *Nephropsis integerrima* (Schmalh.). Эта находка указывает на сходство абинской свиты по флоре с частью тунгузской антраколитовой системы,[1] возраст которой, как пермский, подтверждается нахождением в ней *Gangamopteris glossopteroides* (Schmalh.). Род *Gangamopteris*, как сказано выше, я признаю пермским.

В заключение считаю долгом поблагодарить В. А. Орестова и В. Д. Фомичева за любезную помощь, которую они оказали демонстрированием мне и Е. Ф. Чирковой основного томского разреза угленосной толщи Кузнецкого бассейна от деревни Старой Балахонки до г. Щегловска при наших первых совместно с ними экскурсиях в эти места. Это обстоятельство очень облегчило мне мое дальнейшее знакомство с этим разрезом.

Для лучшего уяснения читателем моей схемы подразделений антраколитовой системы Кузнецкого бассейна на основании ее ископаемой флоры, выработанной в главных чертах своих совместно с Е. Ф. Чирковой, я отсылаю его к прилагаемой таблице (стр. 33).

Настоящую работу мою, являющуюся дополнением и исправлением моей первой работы «О возрасте угленосной толщи Кузнецкого бассейна», я посвящаю памяти незабвенного сына моего Всеволода и усопшего собрата по исследованию пермской флоры Кузнецкого бассейна, друга моего, знаменитого проф. Charles René Zeiller.

Май 1932 г.

---

[1] Этой Тунгузской угленосной толще нельзя придавать название тунгузской свиты и говорить о принадлежности к этой свите главнейшей угленосной толщи Кузнецкого бассейна, как это делается А. А. Борисяком в его курсе Исторической геологии, 2-е изд., 1931, стр. 221. Эта тунгузская толща несомненно соответствует в части своей или в целом угленосной толще Кузнецкого бассейна и может быть расчленена по ископаемой флоре на свиты, соответствующие свитам Кузнецкого бассейна, изученной в отношении этой последней значительно полнее Тунгузского бассейна, откуда мы располагаем только случайными сборами ископаемой флоры, характеризующими не всю серию его осадков Поэтому разъяснять почти неизвестным хорошо известное, как это делается в указанном учебнике, недопустимо. В Тунгузском бассейне определенно представлены как томская, так и абинская свита Кузнецкого бассейна, а быть может и кольчугинская. Последняя свита, судя по материалам зоолога А. Ф. Чирковой (1931), повидимому развита на р. Хатанге; в ее коллекции оттуда Е. Ф. Чирковой были обнаружены минерализованные участки материнского вещества угля (р. Хатанга-Котуй, в 120 км. вверх от села Хатанги), во всем тождественные с таковыми из кольчугинской свиты Кузнецкого бассейна. Развитие томской свиты на р. Хатанге ясно по нахождению на этой реке отпечатков листьев *Noeggerathiopsis Theodori* Tchirkova et Zal., доставленных оттуда еще И. П. Толмачевым и определявшихся мною тогда как *Cordaites aequalis* Goepp. sp.

Примечание. Номерация 16 страниц, следующих за 582-й, должна быть от 583 до 598, а не 593—608, как ошибочно напечатано.

Оглавление — Sommaire

[1] В тексте ошибочно 599.
[2] » » » 607.

[1] Dans le texte par erreur 599.
[2] » » » » 607.

Заглавие, отмеченное звездочкой, является переводом заглавия оригинала
Le titre marqué d'un astérisque est une traduction du titre original

Цена 3 руб. 50 коп.